

فصل ۳ : توان‌های گویا

و عبارت‌های جبری

تشریحی + تستی

برای دانلود فیلم و جزوات دروس **اختصاصی** پایه دهم و شرکت در سایر پایه‌ها به سایت جشان آکادمی رجوع کنید jashan-academy.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

برای تالیف این جزوه از بهترین و به روزترین تست های کتاب های کهک درسی و همچنین آزمون های آزمایشی و کنکور در کنار سوالات تالیفی استفاده شده است.
لینک دانلود فیلم و جزوات همه دروس اختصاصی jashan-academy.ir

فصل ۳: توان های گویا و عبارات جبری

تذکر: این فصل به حدی کاربردی است که می تواند ریاضی شما را دگرگون کند. پس تک به تک نکات و سوالات جزوه را به طور جدی و دقیق بررسی کنید.

درسنامه ۱: ریشه nام و ویژگی های ریشه ها

ریشه nام

وقتی می گوئیم b ریشه n ام a است، یعنی $b^n = a$. در واقع برای محاسبه ریشه n ام عدد a باید ببینیم چه اعدادی هستند که اگر به توان n برسند جوابشان a می شود.

سوال: ریشه های دوم اعداد ۱۶، ۲۷، صفر و ۴- را بررسی کنید.

سوال: تفاوت این دو عبارت در چیست؟

الف) $\sqrt{9}$

ب) ریشه دوم عدد ۹

نتیجه: حاصل جذر یک عدد مثبت همیشه است اما ریشه دوم یک عدد مثبت می تواند دو جواب گزینه داشته باشد. پس دو حالت داریم:

۱- اگر n فرد باشد، ریشه n ام a و $\sqrt[n]{a}$ دقیقاً یکی هستند.

۲- اگر n زوج باشد و البته a عددی مثبت باشد، ریشه n ام a ، $\sqrt[n]{a}$ است نه فقط $\sqrt[n]{a}$.

نکته: جذر را با مجذور (مربع) قاطی نکنید! عدد ۶ جذر ۳۶ است و ۳۶ می‌شود مجذور ۶!

سوال: ریشه سوم اعداد $+\frac{1}{8}$ ، ۲۷، صفر و ۶۴- و $-\frac{1}{125}$ را بررسی کنید.

نکته: زیر رادیکال با فرجه فرد هر عدد تعریف شده‌ای (مثبت، صفر یا منفی) می‌تواند قرار گیرد اما زیر رادیکال با فرجه زوج تنها اعداد نامنفی (مثبت و صفر) مجازند قرار گیرند. پس داریم:

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad \sqrt{-5} = \text{ن. ت.}$$

سوال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

- | | |
|-------------------|------------------|
| ریشه چهارم عدد ۱۶ | ریشه ۵ عدد ۲۴۳- |
| ریشه دهم عدد ۱۰۲۴ | ریشه پنجم عدد ۳۲ |
| ریشه ششم عدد ۶۴- | ریشه ۱۹ عدد ۱- |

سوال: درستی یا نادرستی هر کدام از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- (۱) عدد $\frac{3}{4}$ ریشه سوم عدد $\frac{27}{64}$ است.
- (۲) عددهای ± 4 توان‌های دوم عدد ۲ هستند.
- (۳) عدد ۶- تنها ریشه سوم عدد ۲۱۶- است.
- (۴) عددهای $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ ریشه‌های دوم مشترک یک عدد هستند.
- (۵) عددهای $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ ریشه‌های دوم مشترک یک عدد هستند.
- (۶) ریشه‌های چهارم عدد ۸۱-، برابر ۳ و ۳- هستند.
- (۷) عدد $\sqrt[n]{a}$ همان ریشه n ام عدد a است.
- (۸) مقدار اختلاف ریشه‌های دوم هر عدد مثبت، ۲ برابر مقدار هر کدام از ریشه‌هاست.
- (۹) مجموع ریشه‌های چهارم عدد ۳ و ریشه سوم عدد a برابر صفر است. a یک عدد مثبت است.
- (۱۰) هر عدد زوج مثبت، دو ریشه سوم و هر عدد فرد مثبت، یک ریشه دوم دارد.
- (۱۱) ریشه‌های چهارم عدد ۶۲۵-، عددهای ۵ و ۵- هستند.
- (۱۲) ریشه‌های ششم عدد ۶۴ به اندازه ۴ واحد با هم اختلاف دارند.
- (۱۳) عدد $\sqrt{2}$ دو ریشه دوم دارد که قرینه هم هستند.
- (۱۴) اگر $\sqrt[3]{625} = a$ باشد، a می‌تواند ۵ یا ۵- باشد.
- (۱۵) ریشه‌های پنجم و هفتم هر عدد، هم‌علامت‌اند.

(۱۶) می توان عددی حقیقی یافت که ریشه سوم نداشته باشد.

(۱۷) تمام اعداد نامنفی، دو ریشه چهارم دارند.

(۱۸) برای هر عدد مثبت a ، $\sqrt[n]{a}$ و ریشه سوم a متمایزند.

نکته: پس مجموع ریشه های دوم (زوج) هر عدد مثبت است. زیرا هم اند.

تعداد ریشه های n ام

عدد a	وضع ریشه	تعداد ریشه ها	فرم ریشه ها	مثال نمونه
۱ $a > 0$	n زوج	a ، ریشه n ام دارد که همدیگرند.	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	ریشه های دوم ۳۶ که عبارت اند از
	n فرد	a ، ریشه n ام دارد.	$\sqrt[n]{a}$	ریشه سوم ۶۴ که می شود
۲ $a < 0$	n زوج	a ، ریشه n ام ندارد!	—	ریشه چهارم ۸- که وجود ندارد!
	n فرد	a ، ریشه n ام دارد.	$\sqrt[n]{a}$	ریشه سوم ۸- که می شود

سوال: کدام عدد(ها) دو ریشه مرتبه ۳۰ ام دارد؟

(ت) $\pi - \sqrt{17}$

(پ) $1 - \sqrt{2}$

(ب) صفر

(الف) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

نکته: ریشه دوم عدد مثبت a به صورت $\pm\sqrt{a}$ و همچنین ریشه چهارم این عدد به صورت $\pm\sqrt[4]{a}$ است و این اتفاق برای ریشه های مرتبه زوج عدد مثبت a تکرار می شود. (این ریشه ها قرینه هم هستند.)

نکته: ریشه سوم عدد حقیقی a به صورت $\sqrt[3]{a}$ و ریشه پنجم این عدد به صورت $\sqrt[5]{a}$ است و این اتفاق برای ریشه های مرتبه فرد عدد حقیقی a تکرار می شود. (هر عدد یک ریشه فرد هم علامت با خود دارد.)

نکته: صفر، تنها عددی است که از هر مرتبه زوج و فرد (دوم، سوم، چهارم، پنجم، ...) فقط یک ریشه دارد. آن ریشه، خود صفر است.



سوال: حاصل این عبارات را حساب کنید.

$$\sqrt[5]{1024}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$\sqrt[4]{256}$$

$$\sqrt[5]{-32}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{0.0545} - \frac{1}{32}}$$

$$5\sqrt[3]{0/216} - 4\sqrt[3]{0/125} + \sqrt[3]{0/008}$$

سوال: کدام عدد ریشه چهارم $28 - 16\sqrt{3}$ است؟

$$2 - \sqrt{13} \quad (4)$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (3)$$

$$1 - \sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 - \sqrt{2} \quad (1)$$

سوال: اگر $a^3 = \sqrt[5]{b^3}$ باشد، ریشه پنجم b کدام است؟

$$a \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{a} \quad (3)$$

$$a^5 \quad (2)$$

$$\sqrt[5]{a} \quad (1)$$

تعیین حدود ریشه nام

مقدار $\sqrt[n]{a}$ چند است؟ یعنی چه عددی به توان n برسد a می‌شود؟

روش حل: دو عدد صحیح متوالی پیدا می‌کنیم که a بین توان n آن‌ها باشد، بعد می‌گوییم $\sqrt[n]{a}$ بین خود این دو عدد است.

سوال: ریشه سوم عدد ۱۱۰ و ریشه دوم عدد ۴۴ - بین کدام دو عدد صحیح متوالی هستند؟

سوال: مشخص کنید هر یک از اعداد زیر، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

$$\sqrt[5]{155} \quad (پ)$$

$$\sqrt[4]{111} \quad (ب)$$

$$\sqrt[3]{212} \quad (الف)$$

تذکر: برای $\sqrt[n]{a}$ ، اگر a منفی و فرجه فرد بود، پیشنهاد این است که منفی را خارج رادیکال ببرید و بعد جای $\sqrt[n]{a}$ را که حال $a > 0$ است، تعیین کنید؛ در آخر انگار که جای قرینه عددی را بخواهید، به هدف می‌رسید.

سوال: عدد $\sqrt[3]{-2\sqrt{40}}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

«آزمونیه مهرماه»

(۱) -۲ و -۱ (۲) -۲ و -۳ (۳) -۳ و -۴ (۴) ۰ و -۱

سوال: چند عدد طبیعی وجود دارد که ریشه سوم و ریشه دوم مثبت آن بین ۲ و ۳ قرار دارد؟

«میکرو»

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

سوال: چند عدد طبیعی وجود دارد که یکی از ریشه‌های مثبت چهارم آن بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ و ریشه پنجم آن در بازه $(1, \sqrt{3})$ باشد؟

«مهرماه جامع»

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

سوال: چه تعداد عدد صحیح به جای a می‌توان قرار داد تا نامساوی $-4 < \sqrt[3]{a} < -3$ برقرار باشد؟

«مهرماه جامع»

(۱) ۳۷ (۲) ۳۶ (۳) ۳۵ (۴) ۳۸

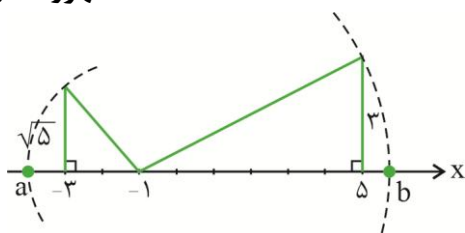
سوال: سه مکعب تو در تو مفروض‌اند. اگر حجم مکعب بزرگ ۲۲۰ و حجم مکعب کوچک ۶۰ سانتی‌متر مکعب باشد، ضلع مکعب متوسط بر حسب سانتی‌متر، برابر با چند عدد طبیعی می‌تواند باشد؟

«IQ»

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سوال: با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $a+b$ کدام است؟

«مهرماه جامع»



- (۱) $3\sqrt{5} - 3$
 (۲) $3\sqrt{5} + 3$
 (۳) $3\sqrt{5} - 5$
 (۴) ۱

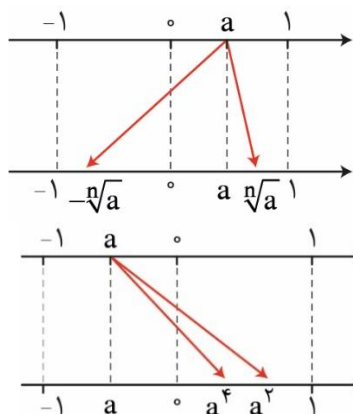
مقایسه بین ریشه‌ها و توان‌های عدد a

محدوده عدد	مقایسه توان‌های مختلف عدد a با هم	مقایسه ریشه‌های مختلف عدد a با هم
۱ اعداد بزرگتر از ۱ $a > 1$	توان بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $1 < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots$	فرجه بیشتر، حاصل کمتری دارد: $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots > 1$
۲ اعداد بین ۰ و ۱ $0 < a < 1$	توان بیشتر، حاصل کمتری دارد: $1 > a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots > 0$	فرجه بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots < 1$
۳ اعداد کوچکتر از -۱ $a < -1$	توان‌های زوج توان بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $1 < a < a^2 < a^4 < a^6 < \dots$ توان‌های فرد توان بیشتر، حاصل کمتری دارد: $\dots < a^5 < a^3 < a < -1$	فرجه فرد بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots < -1$
۴ اعداد بین -۱ و ۰ $-1 < a < 0$	توان‌های زوج توان بیشتر، حاصل کمتری دارد: $0 < \dots < a^4 < a^2 < a < 1$ توان‌های فرد توان بیشتر، حاصل بیشتری دارد: $-1 < a < a^3 < a^5 < \dots < 0$	فرجه فرد بیشتر، حاصل کمتری دارد: $-1 < \dots < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a < 0$

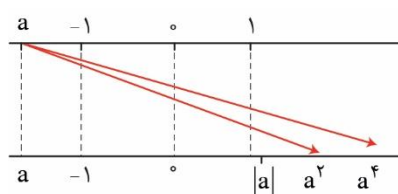
نکته: کتاب می‌گه میتونین دو تا محور زیر هم بکشین و اولی را به خود عدد و پایینی را به ریشه n ام آن اختصاص بدین؛ بعد هم هر عدد از محور بالا را با یک فلش (یا بیشتر) به ریشه n ام آن عدد روی محور پایین نسبت دهید.

بررسی چهار حالت فوق بر روی محور			
حالت ۴	حالت ۳	حالت ۲	حالت ۱

تذکر: در حالت اول، وقتی n زوج است، ریشه‌های n ام عدد a، $\pm \sqrt[n]{a}$ هستند (طبق این نمودار). همان طور که می‌بینید $\sqrt[n]{a} < -1$ و با افزایش n، ریشه‌های منفی افزایش می‌یابند.



تذکر: در حالت دوم، وقتی n زوج است، ریشه‌های n ام a به صورت $\pm \sqrt[n]{a}$ هستند و با افزایش n ، ریشه‌های منفی کاهش می‌یابد. پس داریم:



تذکر: در حالت چهارم، وقتی $-1 < a < 0$ و توان زوج باشد، جوابش حتماً مثبت است و نامساوی به صورت $1 < |a| < a^2 < a^4 < a^6 < \dots$ می‌شود. شکلش را هم ببینید:

تذکر: در حالت سوم، وقتی $a < -1$ باشد، توان و ریشه‌های فردش حتماً از -1 کمتر هستند. حالا وقتی در این حالت، توان زوج باشد، جوابش حتماً مثبت است و تازه، مدام افزایش می‌یابد، یعنی $1 < |a| < a^2 < a^4 < a^6 < \dots$ (اعداد منفی ریشه زوج ندارند).

سوال: اعداد هر دسته را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{4}{3}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-0.5}, \left(\frac{3}{5}\right)^3, (0.6)^{-0.6}, (0.6)^\pi$$

$$(-3)^9, (-3)^8, (-3)^7, (-3)^6$$

$$(-0.25)^4, \left(-\frac{1}{4}\right)^5, (-0.25)^6, \left(-\frac{1}{4}\right)^7$$

سوال: اعداد هر یک از دسته‌های زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt[4]{0.01}, \sqrt[3]{0.01}, \sqrt{0.01}$$

$$\sqrt[9]{-\frac{1}{3}}, \sqrt[7]{-\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{-11}, \sqrt[3]{-11}, \sqrt[1]{-11}$$

«IQ»

سوال: کدام عدد، بزرگ‌تر از بقیه است؟

$$2^{0/4} (4)$$

$$\sqrt[3]{3} (3)$$

$$\sqrt{2} (2)$$

$$3^{0/3} (1)$$

سوال: اعداد $a = \sqrt[4]{8}$ ، $b = \sqrt[3]{4}$ و $c = \sqrt{3}$ را به ترتیب از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

سوال: کدام عدد از سایر عددها کوچکتر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt[3]{5}$ (۳) $\sqrt[6]{17}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

سوال: اگر $a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{7}{3}}$ باشد، حدود a کدام است؟

«نردبام جامع»

- (۱) $-1 < a < 1$ (۲) $0 < a < 1$ یا $a < -1$ (۳) $a > 0$ (۴) $a > 1$ یا $-1 < a$

سوال: هرگاه $a - 1 < \sqrt[4]{a - 1}$ باشد، در این صورت چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

«مهر و ماه جامع»

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

سوال: اگر بدانیم $-1 < a^3 < a^5$ ، در این صورت کدام نتیجه نادرست است؟

«مهر و ماه»

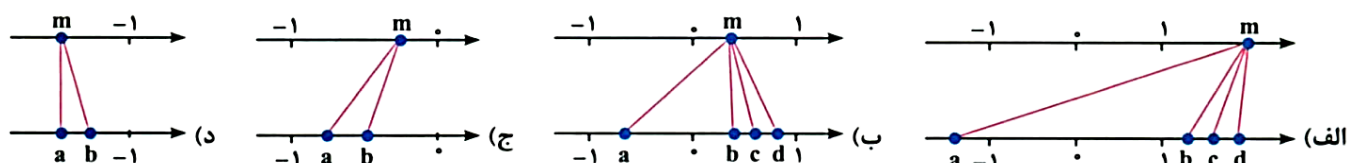
- (۱) $a^6 < a^{10}$ (۲) $a^4 > a^6$ (۳) $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[5]{a^2}$ (۴) $a < -1$

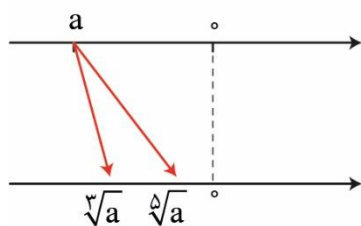
سوال: اگر $0 < a < 1$ باشد، ساده شده عبارت $|\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a}| + |a^2 - \sqrt[3]{a}| - |\sqrt[4]{a} - a^2|$ کدام است؟

«نردبام جامع»

- (۱) صفر (۲) $2a^2$ (۳) $-2\sqrt[3]{a}$ (۴) $2\sqrt[4]{a}$

سوال: در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. هر کدام از ریشه‌ها را مشخص کنید.

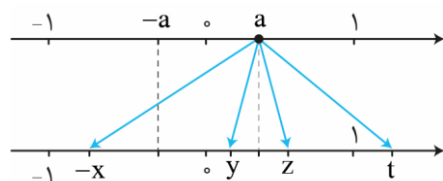




سوال: با توجه به شکل مقابل، a کدام عدد زیر می تواند باشد؟

- (۱) -0.6
 (۲) $-1/2$
 (۳) -1
 (۴) 0.4

سوال: با توجه به محور اعداد حقیقی زیر، x, y, z و t از راست به چپ، به ترتیب کدام می تواند باشد؟ «نردبام جامع»

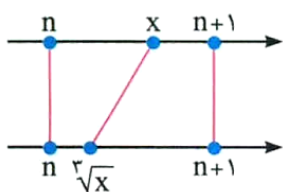


(۱) $a^2, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}$

(۲) $\frac{1}{a}, \sqrt[3]{a}, a^2, a^3$

(۳) $a^3, \sqrt[3]{a}, a^2, \sqrt{a}$

(۴) $\frac{1}{a}, \sqrt[4]{a}, a^2, \sqrt[3]{a}$



سوال: در شکل زیر، اعداد روی محور بالا به ریشه سومشان روی محور پایین وصل

شده‌اند. x کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟ ($n \in \mathbb{Z}$) «IQ»

(۴) $-\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{2}{3}$

مقایسه اعداد توان دار با توان های مساوی

۱- توان فرد، جهت نامساوی را عوض نمی‌کند:

(n فرد) $a < b \Rightarrow a^n < b^n$

۲- در مورد توان زوج، باید حواسمان به مثبت یا منفی بودن پایه‌ها باشد.

(الف) اگر پایه‌ها مثبت باشند، توان زوج، جهت نامساوی را عوض نمی‌کند:

(n زوج) $0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n$

(ب) اگر پایه‌ها منفی باشند، توان زوج، جهت نامساوی را عوض می‌کند:

(n زوج) $a < b < 0 \Rightarrow a^n > b^n$

(پ) اگر فقط یکی از پایه‌ها منفی باشد، توان زوج، ممکن است جهت نامساوی را عوض کند یا نکند. مثلاً $-2 < 3$ و

$(-2)^4 < 3^4$ همچنین $-3 < 2$ و $(-3)^4 > 2^4$

«مهر و ماه»

سوال: اگر $-1 < \sqrt[3]{a} < -2$ باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

آزمون تستی ریشه n ام و خواص آن

سوال: اگر k یک عدد صحیح باشد و $k + 1 < \sqrt[3]{-200} < k$ باشد، k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

سوال: ریشه پنجم عدد -200 به کدام عدد نزدیک تر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) -۴

سوال: اگر $5 < \sqrt{x} < 6$ و $3 < \sqrt[3]{x} < 4$ باشند، x چند مقدار طبیعی می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

«آزمون های گاج»

سوال: چند مقدار طبیعی n ، در رابطه $1 - \sqrt{2} < \sqrt{n} < \sqrt{7} + 1$ صدق می کند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

سوال: چند عدد طبیعی بخش پذیر بر ۳ وجود دارد که ریشه پنج آن ها از ۲ بزرگ تر و ریشه چهارم مثبت آن ها بین

۲ و ۳ باشد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

«نردبام جامع»

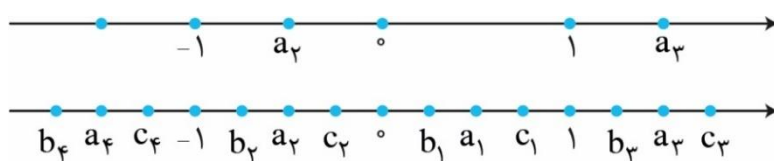
سوال: جمع اعداد طبیعی که در نامساوی $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{10}$ صدق می کنند، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

سوال: اگر $|x| + x = 0$ باشد، کدام مقدار x در نامساوی $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$ صدق می‌کند؟

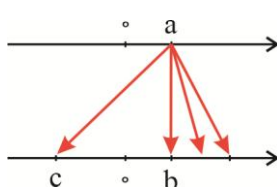
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$ (۴) $-\sqrt[5]{11}$

سوال: در شکل زیر، اگر هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا به یکی از اعداد مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است وصل شوند، کدام یک از اعداد باید وصل شوند؟



- (۱) c_4, b_3, b_2
 (۲) c_4, b_2, b_3
 (۳) b_4, c_3, c_2
 (۴) b_4, c_2, c_3

سوال: در محورهای روبه‌رو، عدد حقیقی a به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. اگر b برابر

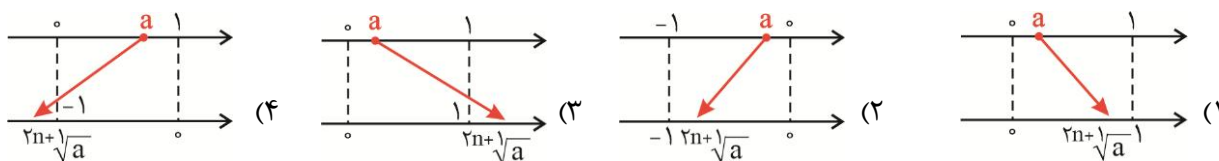


«مهرماه جامع»

۰/۰۰۸۱ باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) $-۰/۰۰۴$ (۲) $-۰/۰۰۸۱$ (۳) $-۰/۰۲۷$ (۴) $-۰/۰۰۰۸$

سوال: هرگاه a یک عدد حقیقی باشد به طوری که $a^2 > a^3$ ، آن‌گاه کدام گزینه ریشه $(2n+1)$ ام a را به درستی نمایش می‌دهد؟ ($n \in \mathbb{N}$) «مهرماه جامع»



درسنامه ۲: توان و رادیکال و قوانین آن

توان

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}}$$

توان طبیعی: اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، توان a^n عدد a را این طوری تعریف می‌کنیم:

قوانین توان رسانی

۱) $a^m \times a^n \rightarrow$ هر کدام ۳ مثال

۲) $\frac{a^m}{a^n} \rightarrow$

۳) $a^m \times b^m \rightarrow$

۴) $\frac{a^m}{b^m} \rightarrow$

۵) $a^{-n} \rightarrow$

۶) $(a^m)^n \rightarrow$

۷) $a^{m^n} \neq a^{mn}$

۸) $a^{-1} = \frac{1}{a}$

۹) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

سوال: هر کدام از عبارات زیر را تا جای ممکن ساده کنید:

$$(\frac{1}{0.64})^{\frac{1}{3}}$$

$$(\frac{1}{0.25})^{\frac{-3}{2}}$$

$$(\frac{1}{27})^{\frac{1}{6}}$$

$$+(\frac{1}{0.625})^{\frac{3}{8}}$$

$$(2^2)^3$$

$$2^{2^3}$$

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4^2} \times \frac{5}{8^3}$$

$$\frac{(\frac{1}{0.2})^{-2}}{(\frac{1}{5\sqrt{2}})\sqrt{2}}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times \frac{3^2}{8} \times (\frac{1}{0.25})^{-3}$$

نکته: کتاب درسی، فقط به توان‌های گویا پرداخته است؛ اما در مورد توان‌های گنگ بدانید:

۱- توان‌های گنگ برای اعداد منفی تعریف نمی‌شوند.

۲- خواصی که برای توان می‌شناسیم، برای توان‌های گنگ هم برقرار است. (برای تمام توان‌های حقیقی برقرار است).

تذکر: این روابط، برای جمع و تفریق برقرار نیستند و در حالت کلی، $(a \pm b)^n$ با $a^n \pm b^n$ برابر نیست.

سوال: حاصل $A = \left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{7}{4}} \times (2/5)^{-\frac{5}{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{80}{21}}$ (۲) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{81}{21}}$ (۳) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{82}{21}}$ (۴) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{83}{21}}$

سوال: حاصل $(3^{10} + 3^{10})(3^{10} + 2^{10} + 2^{10})$ برابر کدام است؟

- (۱) 6^{30} (۲) 3×6^{20} (۳) 6^{20} (۴) 6^{11}

سوال: اگر $A = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ و $B = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{12}}\right)$ باشند، مقدار AB کدام است؟

سوال: اگر $A = \sqrt{80} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$ باشد، A^2 کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $8\sqrt{5}$ (۳) 10 (۴) 20

سوال: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و داشته باشیم $3^b - 3^{b+2} = 3^{a+3}$ ، آنگاه حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

سوال: اگر $a = 3^{k+2}$ و $b = 9^k$ باشد، آنگاه کدام رابطه بین a و b همواره برقرار است؟ «مهروماه جامع»

- (۱) $a^2 = 9b$ (۲) $a^2 = 81b$ (۳) $a^2 = b + 2$ (۴) $a^2 = 2b + 2$

«مهر و ماه جامع»

سوال: از رابطه $4^{2x-1} \times 3^{y+2} = 96$ حاصل $\frac{9}{4}(x+y)^{-1}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سوال: با فرض $\frac{4^{x+2}}{5^{y-3}} = 10^{x+1}$ حاصل $x+y$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۲ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

«نردبام جامع»

سوال: اگر $3^a = 4$ و $2^b = 9$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

«نردبام جامع»

سوال: اگر $3^a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $5^{\frac{1}{b}} = \sqrt{3}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟ $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)

سوال: ساده شده عبارت $\frac{3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x}{2^x + 2^x + 2^x + 2^x + 2^x}$ کدام است؟ $\frac{3^{x+1}}{5 \times 2^x}$ (۴) $\frac{2^x}{5 \times 3^{x+2}}$ (۳) $\frac{3^{x+1}}{2^{x-1}}$ (۲) $(\frac{3}{2})^x$ (۱)

«تجربی داخل ۱۴۰۰»

سوال: اگر $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$ باشد، مقدار x کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سوال: اگر $a = \sqrt[n]{5} = 5^{\frac{1}{n}}$ باشد، مقدار $\frac{a^m + a^n}{a^m - a^n}$ کدام است؟ «نردبام جامع»

۵ (۴)

 $\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

 $\frac{3}{2}$ (۱)

مرور ویژگی‌های توان

۱	$a^0 = 1$	هر عددِ صفر به توانِ صفر برسد، جویبش می‌شود ۱.
۲	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	در ضربِ عددهای توانی با پایهٔ مشترک، پایه را بنویسید و توان‌ها را جمع کنید.
۳	$a^m \times b^m = (ab)^m$	در ضربِ عددهای توانی با توانِ یکسان، پایه‌ها را در هم ضرب کنید و توان مشترک را برایش بنویسید.
۴	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	در تقسیمِ دو عدد توانی با پایه‌های مشترک، پایه را نوشته و توانِ مخرج را از توانِ صورت کم کنید.
۵	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	در تقسیمِ دو عدد توانی با توان‌های مشترک، پایهٔ صورت را بر پایهٔ مخرج تقسیم کرده و توانِ مشترک را برایش بنویسید.
۶	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ نتیجه: $\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	اگر می‌خواهید توانِ منفی را از بین ببرید، باید پایهٔ عددِ توانی را معکوس کنید.
۷	$(a^m)^n = a^{mn}$	اگر یک عددِ توانی کلاً به توان برسد، پایه را نوشته و توان‌ها را در هم ضرب کنید.

پل ارتباطی بین توان و رادیکال

تعریف: اگر a عدد حقیقی و مثبت باشد، آن وقت توانِ $\frac{m}{n}$ اُم عدد a را به فرم $a^{\frac{m}{n}}$ می‌نویسیم و البته می‌دانیم که $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ؛ m عددی صحیح و n طبیعی است. اگر $a \leq 0$ باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم! (یا اگر a عددی منفی باشد، حق ندارید $a^{\frac{m}{n}}$ را به فرم $\sqrt[n]{a^m}$ بنویسید!) برای مثال فرجه سوم -1 برابر -1 است ($\sqrt[3]{-1} = -1$) ولی $\frac{1}{3}(-1)$ تعریف نشده است.

تذکر: سه قرارداد مهم:

(۱) فرجهٔ رادیکال، عدد طبیعی و مخالف ۱ است.

(۲) همهٔ توان‌ها اعداد گویا هستند.

(۳) زیر هر رادیکالی با فرجهٔ زوج نامنفی فرض می‌شود.

قوانین رادیکال (جذر) گیری

۱) $\sqrt[m]{a \cdot b} =$

۲) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} =$

۳) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} =$

۴) $\sqrt[m]{a^n \sqrt{b}} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m \times n]{b}$

۵) $\sqrt[m]{a \pm b} \neq \sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{b}$

۶) $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b}$

۷) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

سوال: هر کدام از عبارات زیر را تا جای ممکن ساده کنید:

$\sqrt{9}$

$\sqrt{-9}$

$\sqrt{48}$

$\sqrt{96}$

$\sqrt[3]{+8}$

$\sqrt[3]{-8}$

$\sqrt{36 \times 64}$

$\sqrt{\frac{81}{61}}$

$\sqrt[4]{2^4 \sqrt{2}}$

$(\sqrt{5})^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[3]{(-3)^2}$

$(\sqrt{-3})^2$

$\sqrt{2^7 \times 5^3}$

$\sqrt{25^2 - 25}$

$\sqrt[5]{6^3 \times 4^3 \times 3^2}$

ساده کردن فرجه با توان:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a^{mp}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} & \text{فرد } p \\ \sqrt[n]{|a|^m} & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[2]{\sqrt{x^2}} \quad , \quad \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{x^2}} = \sqrt[3]{|x|} \quad \text{مثل:}$$

در مورد دومی، فکر نکنید حالا که فرجه فرد شده قدر مطلق نمی‌خواهید. فقط اگر پس از ساده کردن، توان جدید زوج

باقی بماند، به کار بردن قدر مطلق و توان زوج، کار اضافی است: $\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{x^2}$

سوال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt[6]{3^3}$$

$$۲) \sqrt[4]{(-2)^6}$$

سوال: آیا موقع ساده کردن $(\sqrt{x})^2$ هم باید از قدرمطلق استفاده کنیم؟

نتیجه: از آن جایی که در رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ می‌تواند منفی باشد، اما در رابطه $(\sqrt{x})^2 = x$ نمی‌تواند، پس به هنگام

ساده کردن توان با فرجه در

سوال: موارد زیر را بررسی کنید:

$$\sqrt[2]{x^2}$$

$$(\sqrt{x})^2$$

$$\sqrt[2]{x^3}$$

$$(\sqrt{x})^3$$

نکته: زمانی که فرجه با توان ساده می‌شود، تنها در صورتی قدرمطلق قرار می‌گیرد که:

(۱) عدد ساده‌شده زوج باشد (هم توان و هم فرجه) **(۲)** توان مربوط به زیر رادیکال باشد.

سوال: پاسخ عبارات زیر را بنویسید:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$(\sqrt{\frac{1}{2}})^2$$

$$\sqrt[2]{(-3)^2}$$

$$(\sqrt{-3})^2$$

$$\sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[4]{(-5)^{12}}$$

$$\sqrt[2]{-5^2}$$

$$\sqrt{(-5)^2}$$

$$\sqrt[4]{5^2}$$

$$\sqrt[4]{5^3}$$

$$\sqrt[4]{5^2}$$

$$\sqrt[2]{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

$$\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x}$$

$$\sqrt{-(\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x)}$$

$$\sqrt[2]{x^3}$$

$$\sqrt[2]{-x^3}$$

$$\sqrt{-x^9}$$

$$\sqrt{-x^7}$$

سوال: اگر $-a < b < 0$ باشد، ساده شده عبارت $\sqrt{a^2} + \sqrt[4]{b^4} - \sqrt{(a-b)^2}$ کدام است؟

- (۱) $-a$ (۲) a (۳) $-b$ (۴) b

سوال: اگر $|x| \neq x$ باشد، حاصل $\sqrt{-x^5} \sqrt[4]{(-x)^4} \sqrt{x^2}$ کدام است؟

- (۱) x (۲) $-x$ (۳) $-\sqrt{-x}$ (۴) $\sqrt{-x}$

سوال: اگر $x < 0$ باشد، حاصل $3\sqrt[4]{x^4} - a\sqrt[5]{x^5}$ برابر $8x$ است. مقدار a کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) 5 (۲) -5 (۳) 11 (۴) -11

بردن عدد به زیر رادیکال: برای این کار باید ضریب را به توان فرجه برسانیم. (در رادیکال‌های با فرجه زوج اگر ضریب منفی بود، علامت منفی را پشت رادیکال نگه دارید.)

سوال: اعداد زیر را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$\begin{array}{ll} 3\sqrt[5]{2} & 2\sqrt[3]{5} \\ \sqrt[3]{4}\sqrt{3} & 2\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4} \\ \sqrt[3]{x^2}\sqrt{y} & \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y\sqrt{z}} \end{array}$$

سوال: عبارت‌های زیر را با استفاده از تغییر فرجه به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \qquad \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{3}$$

سوال: اعداد $3\sqrt[4]{2}$ و $5\sqrt[3]{4}$ را به فرم $\sqrt[n]{a}$ یا قرینه آن بنویسید.

سوال: اگر $A = \sqrt{5} - \sqrt{7} \times \sqrt[4]{32} - 10\sqrt{7}$ ، کدام عدد گویاست؟ «نردبام جامع»

- (۱) $A + \sqrt{7}$ (۲) $A + 2\sqrt{7}$ (۳) $A + \sqrt{3}$ (۴) $A + 2\sqrt{3}$

سوال: مقدار $a = 2\sqrt{2}$ بزرگ تر است یا $b = \sqrt[3]{22}$ ؟

قانون ضرب فرجه‌ها: در رادیکال‌های تو در تو، مهم‌ترین ویژگی به صورت مقابل است:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = mn\sqrt{a} \quad , \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{k/a}} = mnk\sqrt{a}$$

سوال: اعداد زیر را به شکل یک رادیکال (بدون ضرب) بنویسید.

$$3) \sqrt[3]{x^2 \sqrt{y}}$$

$$2) \sqrt[5]{3\sqrt[3]{2}}$$

$$2) \sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}$$

$$4) \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{y\sqrt{z}}}$$

تذکر: اگر در حل بعضی از تست‌های این بخش به مشکل برخوردید، می‌توانید رادیکال را به صورت عبارت با توان کسری بنویسید (زیر رادیکال باید مثبت باشد).

سوال: کدام گزینه زیر همواره به ازای هر عدد حقیقی a و b برقرار است؟ (m و n اعداد طبیعی هستند). «مهرماه جامع»

$$\sqrt[n]{|a|^m} = (n\sqrt{a})^m \quad (4)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (n\sqrt{a})^m \quad (3)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (2)$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad (1)$$

سوال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$2\sqrt{3\sqrt{15}} \times \sqrt{5\sqrt{15}}$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27}$$

$$\frac{2\sqrt[5]{128} + 3\sqrt[5]{128}}{6\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{4}}$$

$$\frac{a^5 (\sqrt{a})^2}{\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{a^{12}}}$$

سوال: اگر $(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^x = 243$ باشد، مقدار $\sqrt[4]{2^x}$ کدام است؟

سوال: ساده شده عبارت $A = (\sqrt{2})^{2+4\sqrt{2}} \times (\frac{1}{2})^{2\sqrt{2}-1}$ کدام است؟

- (۱) $2^{2+\sqrt{2}}$ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) $4^{2+\sqrt{2}}$

سوال: اگر $\sqrt[4]{16} = a^3$ باشد، ریشه سوم $a - 41$ کدام است؟

«IQ»

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) $-2\sqrt{2}$ (۴) $-3\sqrt{2}$

سوال: اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟

«ریاضی خارج ۹۸»

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

سوال: اگر $\sqrt[3]{9} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ باشد، x ریشه سوم کدام عدد است؟

«IQ»

- (۱) $3\sqrt[3]{3}$ (۲) $9\sqrt[3]{3}$ (۳) $3\sqrt[3]{9}$ (۴) $9\sqrt[3]{9}$

سوال: حاصل عبارت $\sqrt[2]{\frac{\sqrt{3}}{2}} \div \sqrt[2]{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ریشه ششم کدام عدد است؟

«IQ»

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

سوال: حاصل عبارت $\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \times \sqrt[2]{4}$ کدام است؟

«مهر و ماه جامع»

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سوال: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}$ کدام است؟

«IQ»

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $1 + \sqrt{2}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$



سوال: با توجه به معادله $(\sqrt[3]{27^{a+3}})(\sqrt[3]{6^b-8}) = 6^{-a+1}$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

سوال: اگر $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^{m-2}}$ باشد، مقدار $m+n\sqrt[3]{2}$ کدام است؟

«آزمون های گاج»

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) $4\sqrt[3]{2}$ (۴) ۲

سوال: حاصل عبارت $A = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + \dots$ کدام است؟

«IQ»

- (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

سوال: اگر $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\dots = x^2 - 6x$ باشد، مقدار x کدام است؟ ($x > 0$)

«آزمون های گاج»

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

قانون رادیکال مرکب: به عبارتی عددی یا جبری در قالب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ ، رادیکال مرکب می‌گوییم. مثل $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ یا

$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}}$. بعضی از رادیکال‌های مرکب قابل ساده شدن هستند.

در رادیکال مرکب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ ، عدد مثبت C را حساب کنید: $C^2 = A^2 - B$ و بعد حاصل رادیکال مرکب می‌شود:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

تذکر: واضح است این فرمول زمانی کارایی دارد که C^2 مساوی یک عدد مربع کامل دربیاید!

تذکر: اگر در فرمول رادیکال مرکب، $\sqrt{B}$ ضریب داشت، اول ضریب را به داخل رادیکال برده و بعد فرمول را اجرا کنید.

سوال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$ (ب) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$

«IQ»

سوال: حاصل عبارت $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}-1$ (۴) ۴

«نردبام جامع»

سوال: اگر $a = \sqrt{7+\sqrt{24}}$ و $b = \sqrt{7-\sqrt{24}}$ باشد، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $\sqrt{7}$ (۳) ۶ (۴) ۷

«IQ»

سوال: اگر جذر عدد $11-4\sqrt{7}$ برابر با a باشد، مجذور عدد $a+1$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) $8-2\sqrt{7}$ (۴) $16-2\sqrt{7}$

«نردبام جامع»

سوال: اگر $a = \sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ، حاصل $(a-1)^2$ کدام است؟

- (۱) $23-17\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $31-12\sqrt{3}$

مرور ویژگی‌های رادیکال

۱	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	اگر می‌خواهید عددی رادیکالی را به فرم توانی بنویسید، توانش کسری می‌شود: صورت کسر، توان عدد زیر رادیکال و مخرجش، فرجه رادیکال.
۲	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	اگر رادیکالی به توان برسد، می‌توانید توان را به عدد زیر رادیکال اختصاص دهید.
۳	$\sqrt[n]{a^m} = n\sqrt[n]{a^{mk}} \quad [a > 0]$	می‌توانید هم به توان عدد مثبت زیر رادیکال و هم فرجه را در عدد طبیعی یکسان و دلخواهی ضرب کنید.
۴	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad [a > 0]$	اگر بخواهید عدد مثبتی را به داخل رادیکال ببرید، باید آن را به توان فرجه برسانید...
۵	$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$	می‌توانید توان عدد زیر رادیکال را با فرجه ساده کنید، فقط اگر فرجه زوج است، قدرمطلق بگذارید...
۶	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$	اگر چند رادیکال بی‌ضریب، روی هم سوار بودند، فرجه‌هایشان را در هم ضرب کنید...

آزمون تستی فـوانین توان و رادیکال

سوال: با فرض $a^{\sqrt{7}} = 3$ ، مقدار a^2 را به صورت $3^{\frac{m}{\sqrt{3}}}$ نوشته‌ایم. m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

سوال: حاصل عبارت $\sqrt[3]{\frac{5x}{16}} \sqrt[4]{\frac{16}{625x^4}}$ کدام است؟ ($x < 0$)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

سوال: اگر $9\sqrt[4]{9} = 3^{2a + \frac{1}{4}}$ باشد، a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ± 1

سوال: اگر $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2^{m-1}}}} = \sqrt[4]{3\sqrt{4}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سوال: به ازای چند مقدار از x ، ۸۱ برابر ریشه سوم عدد $27x^2$ برابر با ریشه دوم عدد 9^{4x} است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



سوال: با فرض $A = \frac{48^{\frac{1}{4}} + \sqrt{4}\sqrt{3^5}}{\sqrt{192}}$ ، حاصل $1 + 2A^{-8}$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱

سوال: اگر $x = \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a^2 \sqrt{a^2 \sqrt{a^2 \dots}}}}$ باشد، حاصل $x^6 - x\sqrt{a^3}$ کدام است؟ ($x, a > 0$)

- (۱) ۲۵ (۲) $2a^2$ (۳) صفر (۴) $-2a^2$

سوال: عبارت $(\sqrt{15} + \sqrt{15})(\sqrt{15} - 1)$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ «مهر و ماه جامع»

- (۱) $\sqrt{15}$ (۲) ۱ (۳) $7\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{7}$

سوال: اگر $(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2}) = 1$ باشد، حاصل $(a+b)^{2022}$ کدام است؟ «مهر و ماه جامع»

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) 2^{2022}

سوال: فرض کنید $a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ کدام است؟ «سراسری ۱۴۰۰»

- (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۲۵ (۴) ۴۹

سوال: اگر عبارت $\sqrt[4]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2^4 \sqrt{3}} \times k$ یک عدد طبیعی باشد، k کدام می‌تواند باشد؟ «نردبام جامع»

- (۱) $1\sqrt{2}$ (۲) $1\sqrt{3}$ (۳) $1\sqrt{6}$ (۴) $1\sqrt{12}$

سوال: اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ برابر k باشد، k^3 کدام است؟ «نردبام جامع»

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2-\sqrt{2}$ (۳) $2+\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}-1$

سوال: اگر $16^a = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \sqrt[3]{2+\sqrt{6}} \sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ باشد، مقدار a کدام است؟ «نردبام جامع»

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

سوال: با فرض $P = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{3/5}$ ، حاصل P^2 کدام است؟ «نردبام جامع»

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

سوال: با فرض $x = 2 - \sqrt{6}$ ، حاصل $\sqrt{x - \frac{2}{x}}$ کدام است؟ «نردبام جامع»

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

این جزوه و تدریس‌های ویدئویی آن تنها مربوط به سایت جشان آکادمی (jashan-academy.ir) و تیم تدریس آن است؛ برای دسترسی به تدریس سایر دروس تخصصی به همین سایت مراجعه بفرمایید یا در کانال روبیکا و تلگرام [@tajrobi10jashani](https://t.me/tajrobi10jashani) عضو شوید.

ارادتمند شما؛ امیررضا جشانی‌پور

درسنامه ۳: اتحاد، تجزیه و عبارت‌های گویا

چند تعریف مهم و پایه‌ای

الف) چند جمله‌ای: یک عبارت جبری که شامل متغیری مثل x بوده و همه توان‌های x در آن، اعداد حسابی هستند. مثل:

ب) درجه چند جمله‌ای: بزرگ‌ترین توان x را در بین همه توان‌های موجود برای x پیدا کنید؛ این عدد می‌شود درجه چندجمله‌ای. مثل:

پ) اتحاد: یک تساوی جبری همیشه درست است. اتحادها به ازای همه مقادیر متغیرهای موجود در آن اتحاد برقرارند. مثل:

ت) تجزیه کردن: یعنی عبارت جبری را به صورت ضرب چند عدد یا پرانتز درآوریم. داخل پرانتزها می‌تواند $+$ یا $-$ باشد اما بین آن‌ها باید x باشد. مثل:

$$9 - 16x^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (3 - 4x)(3 + 4x)$$

نکته: در یک جمله‌ای‌ها، توان هر متغیر، درجه یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر نامیده می‌شود. مثلاً درجه $5x^2y^3$ نسبت به x و y به ترتیب ۲ و ۳ است. راستی اعداد مخالف صفر، یک جمله‌ای‌های درجه صفر هستند.

سوال: تساوی $(x-a)^2(x+2) = bx^3 + cx + d$ نسبت به x یک اتحاد است. مقادیر a ، b ، c و d را بیابید.

اتحادهای جبری

اتحاد، یک تساوی جبری است که به ازای جميع مقادیر متغیرها، برقرار است.

۱) اتحاد مربع دو جمله‌ای:



سوال: مقدار مجذور عدد $A = 2003$ را به کمک اتحادها حساب کنید.

نتایج اتحاد مربع دو جمله‌ای:

سوال: اگر $ab = 4$ و $a - b = 3$ باشد، $a^2 + b^2$ را بیابید.

سوال: اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد، مقدار $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

سوال: با فرض $a + b = 2$ و $a^2 + b^2 = 5$ ، مقدار $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}$ کدام است؟ «نردبام»

۴۰۰ (۴)

۳۹۸ (۳)

۳۹۲ (۲)

۳۹۰ (۱)

تکنیک: وقتی از بین جمع، تفریق یا ضرب دو عبارت، دو تا معلوم است و سومی را می‌خواهیم، یک حرکت تکنیکی خوب کمکمان می‌کند: به توان ۲ رساندن!!

سوال: اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد، $x + \frac{1}{x}$ را بیابید. ($x > 0$)

سوال: اگر $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$ باشد، آن‌گاه حاصل $|x - \frac{1}{x}|$ چقدر است؟ «تالیفی»

۵√۵ (۴)

۳√۳ (۳)

۳√۵ (۲)

۵√۳ (۱)

سوال: اگر $x + \frac{2}{x-1} = 7$ باشد، حاصل $\frac{4}{(x-1)^2} + (x-1)^2$ کدام است؟ «میکرو قرن»

۱۲ (۴)

۲۱ (۳)

۳۲ (۲)

۴۵ (۱)



سوال: اگر $\frac{x^4+1}{x^2} = 18$ باشد، حاصل $\left| \frac{x^2-1}{x} \right|$ کدام است؟ «آزمون های گاج»

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

سوال: اگر $x^2 + 1 = 7x$ باشد، حاصل $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سوال: اگر $6a^2 - 4a - 5 = 0$ باشد، حاصل $9a^2 + \frac{25}{4a^2}$ کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

سوال: هرگاه $x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{5}$ باشد، آن گاه حاصل $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 + 8}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۵

سوال: حاصل $\sqrt{(\frac{x^4}{8} - \frac{2}{x^4})^2 + 1}$ به صورت $\frac{x^A + A}{8x^4}$ است. A کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) -۴ (۴) -۱۶

سوال: ریشه چهارم منفی عدد $(5 + \sqrt{24})^2 - 40\sqrt{6}$ کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) $-\sqrt{3} - 2$ (۲) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3} - 2$ (۴) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$

سوال: اگر $9a^2 + 4b^2 = 15ab$ باشد، حاصل $\frac{3a-2b}{3a+2b}$ کدام است؟ $(a > b > 0)$ «نردبام جامع»

- (۱) ۹ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

سوال: اگر $a^2 + b^2 = 3ab$ باشد، حاصل $A = \frac{a+b+\sqrt{ab}}{a-b+\sqrt{5ab}}$ کدام است؟ $(a > b > 0)$ «آزمون های گاج»

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

سوال: کمترین مقدار عبارت $2x^2 + y^2 + 4x - 2xy + 12$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

سوال: کدام عبارت را به جای A قرار دهیم تا عبارت $9x^2y^2 + x^4 + A$ به صورت توان دوم یک دوجمله ای درآید؟ «مهر و ماه»

- (۱) $-3x^2y$ (۲) $-6x^2y$ (۳) $3x^2y^2$ (۴) $6x^3y^2$

سوال: اگر $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a+b+c)$ ، آنگاه مقدار c کدام است؟ «گاج»

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سوال: مقدار عبارت $\sqrt{5^6 + 2^4 + 10^3}$ کدام است؟ «آزمون گاج»

- (۱) ۱۳۳ (۲) ۱۲۹ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۱۷

تذکر: معمولاً عبارت‌هایی که به شکل $a \pm \sqrt{b}$ زیر رادیکال قرار می‌گیرد، برای ساده کردن عبارت، سراغ اتحادهای مربع دوجمله‌ای می‌رویم.

$$3 + 2\sqrt{2} =$$

$$8 + 2\sqrt{15} =$$

$$5 \pm 2\sqrt{6} =$$

$$7 \pm 2\sqrt{10} =$$

سوال: حاصل $A = \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ به صورت $\sqrt{m-n}$ نوشته شده است، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۲) اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b) =$$

سوال: حاصل عبارت $19/9 \times 20/1$ کدام است؟

۳۹۹/۰۹ (۴)

۳۹۹/۹۹ (۳)

۳۹۸/۹۹ (۲)

۲۹۹/۸۹ (۱)

سوال: عبارات زیر را به کمک اتحادها تا جای ممکن ساده کنید:

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)+1$$

$$(x+y+\sqrt{2xy})(x+y-\sqrt{2xy})$$

$$\frac{25x^2 - y^2}{5x - y}$$

$$(2+\sqrt{3})^5(2-\sqrt{3})^6$$

سوال: فرض کنید $a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ ، مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2(a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ ، کدام است؟ «خارج ۱۴۰۰»

۴۹ (۴)

۲۵ (۳)

۱۶ (۲)

۹ (۱)

سوال: اگر $A = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{6}$ و $B = \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{6}$ باشند، حاصل عبارت $(\sqrt[4]{2A^2} - A^2 - B^2)(\sqrt[4]{2A^2} + A^2 + B^2)$ چند واحد از $\sqrt{6}$ کمتر است؟ «میکرو قرن»

- (۱) ۶ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

سوال: حاصل $A = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{6}} \times \sqrt[4]{11 - \sqrt{120}}$ کدام است؟ «آزمون‌های گاج»

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

سوال: واسطه هندسی منفی دو عدد $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1$ و $\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1$ کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) $1 - \sqrt{2}$ (۲) $1 - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3} - 2$

هزدوج تراکتوری:

سوال: حاصل عبارت $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ به ازای $x = \sqrt[16]{3}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سوال: اگر $x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{2} + 2$ باشد، حاصل عبارت $(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) - \frac{1}{4}y^8$ کدام است؟ «IQ»

- (۱) -۴ (۲) -۸ (۳) -۱۶ (۴) -۳۲

سوال: اگر حاصل عبارت $\frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^4 + \frac{1}{x^4})(x^8 + \frac{1}{x^8})(x^{16} + \frac{1}{x^{16}})}{(x^2 - \frac{1}{x^2})}$ به ازای $x = \sqrt[4]{2}$ برابر با $2^a - 2^b$ باشد، حاصل

«مهروماه» $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۳) اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$(a+b)^3 =$$

$$(a-b)^3 =$$

سوال: حاصل عبارات زیر را بنویسید:

$$(3x + 2y^2)^3 =$$

$$\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{y}\right)^3 =$$

$$(3x-2)^3 - 36x + 8$$

سوال: حاصل عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x$ را به ازای $x = \sqrt{3} + 1$ به دست آورید.

سوال: ساده شده عبارت $(\sqrt[3]{8\sqrt{5}} + 16 + \sqrt{\sqrt{5}+1}) \times \sqrt{\sqrt{5}-1}$ کدام است؟ «گاج»

$$8\sqrt{5} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (1)$$

سوال: ساده شده عبارت $A = \sqrt{(45+4\sqrt{41})^3} - \sqrt{(45-4\sqrt{41})^3}$ کدام است؟ «گاج»

$$516 \quad (4)$$

$$512 \quad (3)$$

$$508 \quad (2)$$

$$540 \quad (1)$$

سوال: مقدار عبارت $x^3 + 6(x+1)^2$ به ازای $x = -2 + \sqrt[3]{10}$ برابر با A است. $\frac{1}{3}A + 1$ کدام است؟ «میکرو قرن»

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$



سوال: اگر $x(x^2 + 3y^2) = 76$ و $y(y^2 + 3x^2) = 49$ باشد، مقدار $\frac{x+y}{x-y}$ کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{2}$

سوال: اگر $a = \sqrt[3]{13 - 3a^2b}$ و $b = \sqrt[3]{4 - 3ab^2}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

نکته: برای به توان ۳ رساندن عددهای اعشاری، از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده کنید.

سوال: مقدار $2/9^3$ کدام است؟

- (۱) $24/379$ (۲) $24/389$ (۳) $23/289$ (۴) $23/279$

نتایج اتحاد مکعب دوجمله‌ای:

سوال: اگر $a^3 + b^3 = 8$ و $a + b = 2$ باشند، حاصل $3 \times (a^2 + b^2)$ کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۰ (۳) ۵۲ (۴) ۵۶

سوال: اگر $x + \frac{2}{x} = 4$ باشد، مقدار $\frac{1}{x^3} + x^3$ کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۰ (۳) ۵۲ (۴) ۵۶



سوال: اگر $0 < a < 1$ و $a^2 + \frac{4}{a^2} = 12$ باشد، مقدار $a^3 - \frac{8}{a^3}$ کدام است؟

- (۱) $14\sqrt{2}$ (۲) $28\sqrt{2}$ (۳) $-28\sqrt{2}$ (۴) $-14\sqrt{2}$

سوال: اگر $x > 0$ و داشته باشیم $\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{v}$ ، مقدار $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟ «میکرو»

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

سوال: اگر $x + y = 5$ و $x^3 + y^3 = 95$ باشد، مقدار $|x^4 - y^4|$ کدام است؟ «IQ»

- (۱) $105\sqrt{17}$ (۲) $95\sqrt{19}$ (۳) ۲۵۵ (۴) ۳۰۰

سوال: اگر $\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = 4$ باشد، مقدار $\frac{1}{a}(a-1)(a+1)$ کدام است؟ «IQ»

- (۱) ۱۶ (۲) ۵۲ (۳) ۷۶ (۴) ۸۲

۴ اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3 + b^3 =$$

$$a^3 - b^3 =$$

سوال: حاصل عبارات زیر را بنویسید:

$$x^3 + 27$$

$$x-1$$

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} - x$$

$$(\sqrt[3]{2} + 2)(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 4)$$



سوال: حاصل عبارت $A = (4x^2 - 2x + 1)(1 + 2x)$ به ازای $x = \frac{1}{2^3}$ کدام است؟

سوال: عرض مستطیلی $2k - 1$ و طول آن $2k + 4k^2 + 1$ است ($k > 1$). اگر مساحت این مستطیل ۶۳ باشد، مقدار k کدام است؟

۲ (۴)

۲/۵ (۳)

۳ (۲)

۳/۵ (۱)

سوال: حاصل عبارت $(x^{12} + x^6 + 1)(x^4 + x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ به ازای $x = \sqrt[6]{6}$ کدام است؟

«مهر و ماه»

۲۱۷ (۴)

۷ (۳)

۲۱۵ (۲)

۵ (۱)

سوال: اگر $x^3 + y^3 - 2 = 0$ باشد، حاصل $\frac{y^2 + y + 1}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

«میکرو قرن»

 $\frac{1-x}{y-1}$ (۴) $\frac{x-1}{y-1}$ (۳) $-\frac{x}{y}$ (۲) $\frac{x}{y}$ (۱)

۵) اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) =$$

سوال: عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کنید.

$$x^2 - 5x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 + 5x - 6$$

$$x^2 + 5x + 6$$

سوال: اگر $x^2 + 5x = 1$ باشد، حاصل $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)$ کدام است؟



سوال: با فرض $x^2 + 3x - 5 = 0$ ، حاصل $P = (x - 5)(x + 1)(x + 3)$ کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) ۱۵ (۲) -۱۵ (۳) ۳۵ (۴) -۳۵

۶ اتحاد مربع سه جمله‌ای

$$(a + b + c)^2 =$$

$$A = (x - y - z)^2 + 6(x - y) + 2xy$$

نکته: در ضمن این اتحاد برای هر تعداد جمله هم قابل تعمیم است، یعنی:

$$(a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + \dots + d^2}_{\text{مجموع مربعات هر جمله}} + \underbrace{2(ab + ac + \dots + ad + \dots)}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو به دوی جملات}}$$

سوال: برای سه عدد a, b و c اگر $a + b + c = 7$ ، $abc = 12$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 17$ باشند، حاصل $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

سوال: اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 17$ و $ab - ac - bc = 16$ ، حاصل $\frac{c+7}{a+b}$ کدام است؟ «نردبام»

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

سوال: اگر $a^2 + b^2 + 4c^2 + 4a - 2b + 4c = -6$ باشد، $\frac{ab}{c}$ کدام است؟ «خیلی سبز»

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴



مربع کامل (فصل بعد): می‌خواهیم عبارتی درجه دوم مثل $x^2 + 6x + 2$ را برحسب مربع کامل یعنی به فرم $a(x+b)^2 + c$ بنویسیم. برای این کار، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

سوال: عبارت $x^2 - 10x + 3$ را برحسب مربع کامل بنویسید.

فرم ریاضی اتحاد	نام اتحاد	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	مربع دو جمله‌ای	۱
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$		
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	مزدوج	۲
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	مکعب دو جمله‌ای	۳
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$		
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	چاق و لاغر	۴
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$		
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	جمله مشترک	۵
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	مربع سه جمله‌ای	۶

چند نتیجه مهم از اتحادها

کاربرد اتحاد	فرم ریاضی اتحاد کمی	
وقتی مجموع مربعات دو عدد را می‌خواهید، برحسب جمع و ضرب آن دو عدد یا با داشتن تفاضل و حاصل ضرب آن‌ها ...	$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$	۱
	$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$	
وقتی مجموع یا تفاضل مکعبات دو عدد را می‌خواهید، با داشتن مجموع و حاصل ضرب آن دو عدد ...	$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$	۲
	$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$	
وقتی مجموع، تفاضل و مجموع مربعات دو عدد در تست حضور دارند و ضرب آن‌ها هیچ نقشی در سؤال ندارد!	$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$	۳
وقتی مجموع، تفاضل و ضرب دو عدد در تست حضور دارند.	$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$	۴

اتحادهای فرعی:

- ۱) $a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 2ab$
- ۲) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
- ۳) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- ۴) $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- ۵) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$
- ۶) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ فرد})$

تجزیه کردن عبارت‌های جبری

چند جمله‌ای‌های $P(x)$ ، $Q(x)$ و $S(x)$ را در نظر بگیرید. به طوری که $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$ باشد، در این صورت گوییم $P(x)$ به دو عبارت $Q(x)$ و $S(x)$ تجزیه شده است و هریک از عبارت‌های $Q(x)$ و $S(x)$ را یک عامل یا شمارنده $P(x)$ می‌نامیم. در این صورت $P(x)$ بر $Q(x)$ و $S(x)$ بخش‌پذیر است.

سوال: اگر $x^2 - 4$ یکی از عامل‌های تجزیه عبارت $P(x) = x^4 + ax^3 - 4x + b$ باشد، حاصل ab کدام است؟ «نردبام»

۱۶ (۴)

-۱۶ (۳)

۸ (۲)

-۸ (۱)

روش‌های تجزیه کردن عبارت جبری

۱- فاکتورگیری: موقعی که همه جمله‌ها یک عامل مشترک دارند؛ مثل:

$$4x^3y^2 - 2x^2y^4$$

$$x^2y^3 + x^3y^4 - 2x^2y^5$$

۲- دسته‌بندی: در این روش جمله‌ها را به دو یا چند دسته تقسیم می‌کنیم و در هر دسته از یک عامل مشترک موجود فاکتور می‌گیریم. خود دسته‌ها عامل مشترکی را به دست می‌دهند. در نهایت از عامل متشترک موجود در دسته‌ها فاکتور می‌گیریم که عبارت را تجزیه می‌کند. مثل:

$$x^3 + 7x^2 - 4x - 28 \xrightarrow{\text{دسته بندی می کنیم}} (x^3 - 4x) + (7x^2 - 28) \xrightarrow{\text{جدا جدا فاکتور بگیر}} x(x^2 - 4) + 7(x^2 - 4)$$

$$x^4 + 2x^3 - x - 2$$

$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24$$

$$(x-1)^2 + 3(x-1) + x + 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6$$

$$x^5 - 1$$

توجه: صرفاً جهت اطلاع، با فرض اینکه n فرد است، اتحادهای زیر را داریم. (تعمیمی از اتحاد چاق و لاغر)

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \quad , \quad x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

۳- اتحادها: با استفاده از اتحادهایی مثل مزدوج، جمله مشترک و چاق و لاغر می‌توانیم ضرب ایجاد کنیم.

نکته: یک دوجمله‌ای که توان هر دو عدد حاضر در آن زوج بوده و علامت وسط هم منها باشد، با اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود.

$$x^6 - 1 \xrightarrow{\text{مزدوج}}$$

$$x^8 - y^8 \xrightarrow{\text{مزدوج}}$$

سوال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$(4x-1)^2 - (x+1)^2$$

$$4a^2 - 4ab + b^2$$

$$x^2 + 4x + 3$$

$$x^5 - 16x$$

$$x^4 - 1$$

$$x^3 + 2x^2 - 28x$$

$$x^3 - 4x + 3$$

$$(x-3)^4 + (x-3)^2 - 2$$

$$x^5 - 5x^3 - 36x$$

$$x^2 - 4x^2y + 4xy^2$$

$$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$$

سوال: در تجزیه عبارت $a^2(1-x) + (b^2 + c^2 + 2bc)(x-1)$ کدام عامل وجود ندارد؟ «مهروماه»

$$x-1 \quad (4)$$

$$b+c-a \quad (3)$$

$$a+b+c \quad (2)$$

$$a+b-c \quad (1)$$

سوال: در تجزیه عبارت $(x-2)(x^2-4x+4)-1$ کدام عامل ضرب موجود است؟ «سراسری ۹۷»

$$x+3 \quad (4)$$

$$x-1 \quad (3)$$

$$x-2 \quad (2)$$

$$x-3 \quad (1)$$

سوال: کدام عبارت در تجزیه $a^2 + 3a - b^2 + b + 2$ مشاهده می‌شود؟

$$a+b-2 \quad (4)$$

$$a+b+2 \quad (3)$$

$$a+b+1 \quad (2)$$

$$a+b-1 \quad (1)$$



سوال: اگر $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ و $a = 2 - \sqrt{3}$ باشد، آن گاه مقدار b کدام می تواند باشد؟

«مهروماه»

- (۱) $\sqrt{3} - 1$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

تذکر: بعضی وقت ها برای دیدن عامل مشترک، لازم است در حرکتی خلاقانه، یک جمله را بشکنیم. (مثلاً به جای $3x$ بنویسیم $x + 2x$) یا جمله ای جدید را اضافه و کم کنیم.

سوال: اگر $2a^2 + 4b^2 - 4ab - 2a + 1 = 0$ ، آن گاه حاصل $3a + 2b$ کدام است؟

«آزمونیم»

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

سوال: کدام یک از گزینه های زیر، یک عامل برای $x^4 + 64$ است؟

«مهروماه»

- (۱) $x^2 - 2x + 8$ (۲) $x^2 + 2x - 8$ (۳) $x^2 + 4x - 8$ (۴) $x^2 - 4x + 8$

۴- حدس ریشه: اگر $x=a$ ریشه یک چند جمله ای باشد، این چند جمله ای حتماً بر $x-a$ بخش پذیر است. در این حالت برای تجزیه، عبارت را بر $x-a$ تقسیم می کنیم، در نهایت تجزیه عبارت اولیه به صورت (خارج قسمت) $(x-a)$ می باشد.

تذکر: در این روش سراغ x هایی مانند ± 1 و ± 2 بروید. اگر حاصل عبارت مثلاً به ازای $x=2$ صفر شد، عبارت را بر $x-2$ تقسیم کنید و ...

سوال: تجزیه $x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ چگونه است؟

سوال: اگر $x-1$ یکی از عوامل $x^3 + ax^2 - x - 3$ باشد، مجموع دو عامل دیگر کدام است؟

«نردبام جامع»

- (۱) $2x+1$ (۲) $2x+2$ (۳) $2x+3$ (۴) $2x+4$



نکته: وقتی عبارتی را تجزیه می‌کنیم، آن عبارت می‌شود مضرب و آن عبارت‌هایی که در تجزیه می‌بینیم، می‌شوند عامل ضربی یا شمارنده!

سوال: شمارنده‌های $x^4 + x$ را مشخص کنید.

۵- روش سه (روسی): در صورتی که x^2 ضربی غیر از ۱ داشته باشد از این روش استفاده می‌کنیم. مثال:

$$2x^2 - x - 6$$

$$2x^2 + 7x + 3$$

سوال: در تجزیه عبارت $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$ کدام عامل دیده می‌شود؟

«IQ»

$$2a^2 - b \quad (4)$$

$$a^2 + 2b \quad (3)$$

$$a^2 - 2b \quad (2)$$

$$a - b \quad (1)$$

سوال: در تجزیه چندجمله‌ای $x^8 + x^4 + 1$ کدام عامل وجود دارد؟

«میکرو قرن»

$$x^2 + x + 1 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x - 1 \quad (3)$$

$$x^2 - x - 1 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x + 1 \quad (1)$$

سوال: اگر عبارت $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ را به صورت $(x^2 - bx + c)(x^2 + bx + 1)(x + a)$ تجزیه کنیم، مقدار

$a^3b^3c^3$ کدام است؟

«میکرو قرن»

$$1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

کسرهای گویا

کسرهایی که صورت و مخرجشان چندجمله‌ای است را عبارت گویا می‌نامیم. فرم کلی این کسرها به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$

است که در آن P و Q چندجمله‌ای هستند، وجود رادیکال یا قدرمطلق حاوی x عبارت را غیرگویا می‌کند.



سوال: مشخص کنید هر یک از عبارت‌های زیر، گویاست یا نه. سپس بگویید عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده‌اند.

$$\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}$$

$$\frac{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x^3}}{x^2} - 1$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$\frac{2^x - 3}{x+3}$$

تذکر: عدد ثابت یا ضریب عددی، رادیکالی باشد، اشکالی ندارد. اما متغیر نباید زیر رادیکال باشد.

ساده کردن کسرهای گویا

روش حل: برای ساده کردن این مدل کسرها، در صورت نیاز، اول از همه مخرج مشترک می‌گیریم، سپس صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده و تا جای ممکن آن‌ها را با هم ساده می‌کنیم. مثل:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^2 - 4} =$$

سوال: ک. م. م $x^2(x+1)$ ، $x(x-1)(x+1)^2$ و $(x-1)^3$ را بیابید.

سوال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\frac{x+1}{x^4-x^3} - \frac{x+2}{x^4-2x^3+x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} \right) \div \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$$

سوال: اگر $A = \frac{2x-2x^2}{-x^3+x^2-2x+2}$ و $B = \frac{x(x+1)^2+x}{2x+x^3}$ ، آنگاه $B-A$ کدام است؟ «آزمون‌های گاج»

$$\frac{x+1}{x^2+2} \quad (4)$$

(3) 1

$$\frac{1}{x^2+2} \quad (2)$$

(1) 2



سوال: عبارت $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$ را با کدام یک از کسرهای زیر جمع کنیم تا حاصل، یک چند جمله‌ای شود؟ «IQ»

$$\frac{3x}{x^2+1} \quad (4)$$

$$\frac{3x^2}{x^2+1} \quad (3)$$

$$\frac{x}{x^2+1} \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} \quad (1)$$

سوال: به ازای کدام مقدار a ، حاصل $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+a\sqrt{x}}{x-1}$ عبارتی گویا می‌شود؟ «IQ»

(4) صفر

(3) 5

(2) 3

(1) 1

سوال: اگر $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} - \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$ باشد، حاصل $AB+BC$ کدام است؟

(4) -2

(3) -1

(2) 2

(1) 1

سوال: به ازای چند مقدار صحیح x ، حاصل عبارت $A = \frac{3x^2+x-1}{x-1}$ عددی صحیح می‌شود؟ «میکرو قرن»

(4) صفر

(3) 4

(2) 3

(1) 2

گویا کردن مخرج کسر

تعریف: منظور از گویا کردن مخرج کسر این است که کاری کنیم تا بدون عوض شدن جواب کسر، مخرج آن به عددی گویا تبدیل شود.



انواع روش گویا کردن مخرج کسر

۱- در ادیکال‌های فرجه ۲:

عبارتی که باید در صورت و مخرج ضرب کنید...	فرم اصلی کسر	
.....	$\frac{\square}{\sqrt{a}}$	۱
..... را در $\frac{\square}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	$\frac{\square}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$	۲
..... را در $\frac{\square}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$		

سوال: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{6}{3 + \sqrt{7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{150}$$

۲- در ادیکال‌های فرجه ۳:

عبارتی که باید در صورت و مخرج ضرب کنید...	فرم اصلی کسر	
.....	$\frac{\square}{\sqrt[3]{a}}$	۱
.....	$\frac{\square}{\sqrt[3]{a^2}}$	۲
..... را در $\frac{\square}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$	$\frac{\square}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$	۳
..... را در $\frac{\square}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$		



نکته: در حالت کلی‌تر وقتی مخرج کسری به فرم $\sqrt[n]{a^m}$ باشد ($m < n$)، برای گویا کردن مخرج آن، صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

سوال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{xy^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{-x\sqrt{-x}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{y}}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$$

$$\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} =$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{6}} + \sqrt{15}$$

سوال: عدد ۲ را به صورت ضرب دو عدد گنگ $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}$ و a نوشته‌ایم. عدد a کدام است؟ «مهرماه»

$$\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{9} \quad (۲)$$

$$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9} \quad (۴)$$

$$\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9} \quad (۳)$$

نکته: اگر حاصل ضرب دو عدد ۱ شود، آن دو عدد معکوس یکدیگرند. مثلاً $2-\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ یا $\frac{\sqrt{a}}{a}$ و $\sqrt{a}$ معکوس یکدیگرند.



«کنکور ۹۹»

سوال: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $-1 + \sqrt{2}$ (۳) $1 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

سوال: مخرج کسر $\frac{x^{0.25}}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}$ را گویا کرده و حاصل کسر برابر $2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}$ شده است. مقدار x کدام است؟

«مهرماه»

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۵۶ (۳) ۸۱ (۴) ۶۲۵

«مهرماه»

سوال: عبارت $\frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2})}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2}$ (۲) $\frac{1}{3}(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2})$ (۳) $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{10} + \sqrt[4]{2}$ (۴) $\frac{\sqrt[4]{10}}{3}$

«میکرو قرن»

سوال: حاصل $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{10+\sqrt{99}}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

سوال: اگر $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$ برابر ۶ باشد، عدد طبیعی n کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) ۸۲ (۲) ۸۴ (۳) ۸۶ (۴) ۸۸

سوال: اگر $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-4} = 5$ باشد، حاصل $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-4}$ کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{5}$

سوال: اگر $\sqrt{x^2+1} = x + \sqrt{1-3x^2}$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-3x^2}$ کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) x (۲) $2x$ (۳) $3x$ (۴) $4x$

سوال: اگر $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2$ ، مقدار $x^2 - 8x + 10$ کدام است؟ «نردبام جامع»

- (۱) -۶ (۲) ۲۶ (۳) -۴ (۴) ۱۶

سوال: اگر $x = 2 - 2^{\frac{1}{3}}$ باشد، حاصل $A = (\frac{x^3 - 6}{x})^3$ کدام است؟ «میکرو قرن»

- (۱) -۴۳۲ (۲) ۴۳۲ (۳) ۲۱۶ (۴) -۲۱۶

سوال: معکوس عبارت $(\sqrt{13} - \sqrt{14})^{1399} (\sqrt{13} + \sqrt{14})^{1400}$ کدام است؟ «IQ»

- (۱) $\sqrt{13} + \sqrt{14}$ (۲) $\sqrt{13} - \sqrt{14}$ (۳) $\sqrt{14} - \sqrt{13}$ (۴) $-\sqrt{13} - \sqrt{14}$

«میکرو قرن»

سوال: حاصل عبارت $(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1} \cdot \frac{125}{75} - 4^{100} - 16^{1000}$ کدام است؟

$(4) \sqrt{3} + 1$

$(3) 1 + \sqrt{2}$

$(2) \sqrt{3} - 1$

$(1) -1 + \sqrt{2}$

آزمون تستی اتحاد، تجزیه و گویا کردن

سوال: با فرض $a^2 - 4a + 1 = 0$ ، حاصل $\frac{\sqrt{a^4 - 2a^2 + 1}}{a}$ کدام است؟ (a عددی بین صفر و یک است). «میکرو قرن»

$(4) 2\sqrt{3}$

$(3) 2\sqrt{2}$

$(2) \sqrt{3}$

$(1) \sqrt{2}$

سوال: اگر تساوی $a(x+2)^2 - 4(2x+1) = 2x^2 + bx + c$ برابر هر عدد حقیقی x برابر باشد، $a+b+c$ کدام است؟ «نردبام جامع»

$(4) 8$

$(3) 6$

$(2) 5$

$(1) 4$

«میکرو قرن»

سوال: اگر $2y = 0$ ، $1 + 4x - 4y\sqrt{x} + 2y^2 - 2y = 0$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

$(4) \frac{7}{4}$

$(3) \frac{5}{4}$

$(2) \frac{3}{4}$

$(1) \frac{1}{4}$

سوال: با فرض $y > x > 0$ ، اگر $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\frac{x+y}{x-y}$ چند برابر عدد $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ است؟ «میکرو قرن»

$(4) -1$

$(3) 1$

$(2) -5$

$(1) 5$



سوال: حاصل عبارت $P = 2(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2)(16x^4 + 81y^4)(x - \frac{3}{2}y)$ به ازای $x = \sqrt[4]{3}$ و $y = \sqrt[4]{2}$ به صورت «مهر و ماه»

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

سوال: فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6} - 2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6} + 2}$. مقدار $(a^2 + b^2 + 2ab)^2(a^2 + b^2 - 2ab)^2$ ، کدام است؟ «کنکور ۱۴۰۰»

- (۱) $4(2 + \sqrt{3})$

- (۲) $4(2 - \sqrt{3})$

- (۳) $16(2 + \sqrt{3})$

- (۴) $16(2 - \sqrt{3})$

سوال: اگر $x > 0$ و $x^4 - 7x^2 + 9 = 0$ ، حاصل عبارت $\frac{2x^3}{x^6 + 27}$ کدام است؟ «آزمون های گاج»

- (۱) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

- (۲) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

- (۳) $2\sqrt{13}$

- (۴) $\frac{1}{2\sqrt{13}}$

سوال: اگر $A = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ و $B = \frac{\alpha\beta}{A} + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}$ باشند، کدام رابطه بین A و B برقرار است؟ «میکرو قرن»

- (۱) $B = A^3$

- (۲) $B = A^2$

- (۳) $B^3 = A$

- (۴) $B^3 = A$

سوال: حاصل عبارت $A = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x + 1)(x^3 + 1)}{x^2 - x + 1}$ به ازای $x = \sqrt[4]{3} - 1$ کدام است؟ «آزمون های گاج»

- (۱) ۳

- (۲) ۲

- (۳) ۱

- (۴) ۴

«IQ»

سوال: اگر $x^{\sqrt{2}-1} = 2$ باشد، مقدار $\frac{x^2}{4}$ کدام است؟

$4\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)

«IQ»

سوال: حاصل عبارت $6\sqrt{5} + (\frac{3+\sqrt{5}}{4})^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{5})$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

سوال: حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{5}-2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{5}+2}{2} \times (8+2\sqrt{15})^{\sqrt{5}-2}$ به صورت 2^a قابل بیان است. مقدار (a^2+1) کدام است؟

«مهروماه»

۱۵ (۴)

۱۹ (۳)

۱۳ (۲)

۲۱ (۱)

«مهروماه»

سوال: کدام گزینه یکی از عوامل در تجزیه عبارت $A = a^3 + b^3 + 3ab - 1$ است؟

$a+b-1$ (۴)

$a+b+1$ (۳)

$a-b+1$ (۲)

$a-b-1$ (۱)

سوال: یکی از عوامل ضرب عبارت $64x^4 + 1$ به صورت $ax^2 + bx + 1$ است. مقدار $a-b$ کدام می تواند باشد؟

«نردبام جامع»

-۴ (۴)

-۸ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)



سوال: اگر $x = \sqrt{2} + 1$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ کدام است؟ «مهر و ماه جامع»

(۱) $2 + \sqrt{2}$ (۲) $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ (۳) $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

سوال: ساده شده عبارت $(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1}) \div \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ کدام است؟ «IQ»

(۱) $x + \sqrt[3]{x}$ (۲) $x - \sqrt[3]{x}$ (۳) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$ (۴) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$

سوال: اگر حاصل $4 - 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$ برابر $\frac{1}{M}$ باشد، مقدار $(6M - 1)^6$ کدام است؟ «آزمون های گاج»

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

سوال: مقدار عبارت $-1 + \frac{4}{\sqrt{6+2+\sqrt{2}}}$ کدام است؟ «میکرو قرن»

(۱) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$

این جزوه و تدریس های ویدئویی آن تنها مربوط به سایت جشان آکادمی (jashan-academy.ir) و تیم تدریس آن است؛ برای دسترسی به تدریس سایر دروس تخصصی به همین سایت مراجعه بفرمایید یا در کانال روبیکا و تلگرام [@tajrobi10jashani](https://t.me/tajrobi10jashani) عضو شوید.

ارادت مند شما؛ امیر رضا جشانی پور



ریشه

مفهوم: $b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$ اسم فارسی b ، ریشه‌ی n ام a است.
 n فرد باشد تعداد ریشه یکی فرم ریشه $\sqrt[n]{a}$
 n زوج باشد $a > 0$ است تعداد ریشه‌ها دوتا فرم ریشه‌ها $\pm \sqrt[n]{a}$
 $a < 0$ است تعداد ریشه هیچی

ویژگی‌های توان

پایه‌ها مساوی: ضرب: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 تقسیم: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 توان‌ها مساوی: ضرب: $a^m \times b^m = (ab)^m$
 تقسیم: $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$
 جمع و منها: $au^m \pm bu^m = (a \pm b)u^m$ جور دیگه $a > 0$ توان‌ها باید مثل هم باشند تا ضرایب جمع و منها شوند.
 توان صفر: $a^0 = 1$
 توان منفی: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ جور دیگه منفی توان را بردار، عدد را معکوس کن.
 توان کسری: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ یادت باشه $a > 0$ هر رادیکال، توان کسری است و برعکس.
 توان ضربی: $(a^m)^n = a^{mn}$

ویژگی‌های رادیکال

فرجه‌های مساوی در ضرب و تقسیم: $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$
 $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
 عملیات چهارگانه با رادیکال‌ها
 جمع و منها: $a\sqrt[m]{u} \pm b\sqrt[m]{u} = (a \pm b)\sqrt[m]{u}$ رادیکال‌ها، درست مثل هم باشند. فقط ضرایب جمع و منها می‌شوند. (این جا $a, b \in \mathbb{R}$)
 ساده کردن توان با فرجه: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$ اگر n زوج بود برای جواب آخر، قدرمطلق هم بذارید.
 ورود عدد به رادیکال: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
 تغییرات روی فرجه: ضرب کردن فرجه و توان در عدد طبیعی، آزاد است. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$
 فرجه‌های سوار روی هم، در هم ضرب می‌شود! $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
 منفی زیر رادیکال فرجه‌ی فرد: بذارش بیرون و قانون‌ها را استفاده کن: $\sqrt[n]{-u} = -\sqrt[n]{u}$ فرد
 جای $\sqrt[n]{a}$ را روی محور می‌خواهید k را پیدا کنید $k \in \mathbb{Z}$ $k^n < a < (k+1)^n$ جای $\sqrt[n]{a}$ بین k و $k+1$ است.

مقایسه‌ی توان‌های مختلف عدد a

توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد
 اگر $a > 1$ باشد، برای هر توانی این طوریه...
 اگر $a < -1$ باشد، برای توان‌های زوج این طوریه...
 اگر $-1 < a < 0$ باشد، برای توان‌های فرد این طوریه...
 مقایسه‌ی توان‌های مختلف عدد a
 اگر $0 < a < 1$ باشد، برای هر توانی این طوریه...
 اگر $a < -1$ باشد، برای توان‌های فرد این طوریه...
 اگر $-1 < a < 0$ باشد، برای توان‌های زوج این طوریه...

مقایسه‌ی فرجه‌های مختلف عدد a

فرجه‌ی بیشتر، حاصل بیشتری دارد
اگر $0 < a < 1$ باشد، برای هر فرجه‌ای این طوریه...
اگر $a < -1$ باشد، برای فرجه‌های فرد این طوریه...

فرجه‌ی بیشتر، حاصل کمتری دارد
اگر $a > 1$ باشد، برای هر فرجه‌ای این طوریه...
اگر $-1 < a < 0$ باشد، برای فرجه‌های فرد این طوریه...

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a \pm b)^2 \mp 2ab \\ (a+b)^2 + (a-b)^2 &= 2a^2 + 2b^2 \\ (a+b)^2 - (a-b)^2 &= 4ab \end{aligned} \right\}$$

دوجمله‌ای: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ نتیجه

سه جمله‌ای: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ مربع

مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ مزدوج دومینوار

$$(a+b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = \frac{a^8 - b^8}{a - b}$$

اتحادها

جمله‌ی مشترک: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

چاق و لاغر: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

مکعب سه جمله‌ای: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

کاربرد در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری هم، از این‌ها استفاده کنید...

صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب کن.

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کن: $\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$

گویا کردن مخرج کسر: برای کسری به فرم

صورت و مخرج را در لنگه‌ی چاق مخرج ضرب کنیم: $\frac{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^m}$ ضرب کن. ($m < n$)

اینجا یه دلنوشته برای کلاس فورمکس و هن بنویس و عکشو برام بفرست :