

جزوه فصل ۱ ریاضی دهم

ویژه رشته‌های تجربی و ریاضی



برای دستیابی به تدریس رایگان همهٔ دروس تخصصی به کانال روبیکا و تلگرام [@tajrobi10jashani](https://t.me/tajrobi10jashani) یه سری بزنین.

بسم الله الرحمن الرحيم

این جزوه و تدریس های ویدیویی آن تنها مربوط به سایت جشان آکادمی (jashan-academy.com) و تیم تدریس آن است؛ برای دسترسی به تدریس سایر دروس تخصصی به همین سایت مراجعه بفرمایید یا به آیدی تلگرام @jashani121212 پیام دهید.

فصل ۱: مجموعه ها، الگو و دنباله

درسنامه ۱: مجموعه ها، مجموعه مرجع و خواص متمم

مجموعه

به دسته ای از اشیا مشخص و دو به دو متمایز **مجموعه** می گویند. اعضای یک مجموعه را درون **آکولاد** یا **{ }** نمایش می دهند.

{۱، ۲، ۳، ...، ۹۹۹}

چند نکته در مورد مجموعه:

- ✓ اعضای آن باید دقیقاً مشخص باشد. مثلاً {اعداد فرد سه رقمی} یک مجموعه است اما {همه ماشین های قشنگ شهر تهران} مجموعه نیست! چون معلوم نیست چه ماشین هایی را باید قشنگ در نظر گرفت!
- ✓ تکرار اعضا در مجموعه تنوع ایجاد نمی کند. پس دو مجموعه {۱، ۳، ۵} و {۱، ۳، ۵، ۵، ۵} کاملاً یکسانند!
- ✓ اگر همه اعضای مجموعه A جزء مجموعه B باشد در این صورت A را زیرمجموعه B می نامیم و خواهیم داشت:

$$A \subseteq B$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad A = \{0, 1, 2, 3\}$$

مثال: اگر $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{2, 3, 4\}$ باشد، در این صورت:

همه اعضا مجموعه A درون مجموعه B است پس $A \subseteq B$

- ✓ هر مجموعه n عضوی n زیرمجموعه دارد. زیرا برای هر عضو دو حالت داریم = با عضو زیرمجموعه هست یا عضو زیرمجموعه نیست

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

زیرمجموعه ها = 2^n

نکته: اگر از یک مجموعه k عضو، l عضو را انتخاب کردیم، و از مجموعه ها تفاوت با آن ها بنویسیم، تعداد زیرمجموعه ها برابر است با: $k!$

لذا اگر مجموعه ها برابر است با: $k!$

نکته: ترتیب باهم تفاوت ندارد

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

در نوشتن اعضای یک مجموعه، ترتیب مهم نیست. پس جابجایی اعضا، مجموعه جدیدی ایجاد نمی‌کند.

همه مجموعه‌ها $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را تهی یا $\{\emptyset\}$ و یا $\emptyset$ می‌نامیم. تهی زیر مجموعه همه... مجموعه‌هاست.

همه مجموعه‌ها $\emptyset \subseteq$

$\{\emptyset\} \neq \emptyset$

نکته: عضو بودن در مجموعه را با $\in$ و عضو نبودن را با $\notin$ و زیر مجموعه بودن را با $\subseteq$ و زیر مجموعه نبودن را با $\not\subseteq$ نشان می‌دهیم.

تک‌عضویه و تک‌عضوری

تذکر: همانطور که $\{2\}$ با $\emptyset$ فرق دارد، $\emptyset$ هم با $\{\emptyset\}$ فرق دارد. زیرا $\emptyset$ یک مجموعه بدون عضو است اما $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تک‌عضوی است.

هر دو مجموعه هم‌بزرگ می‌شوند!

سوال: زیر مجموعه‌های مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید:

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{3\}$$

$$A_5 = \{1, 2\}, A_6 = \{1, 3\}, A_7 = \{2, 3\}$$

$$A_8 = \{1, 2, 3\}$$

$$n = 3$$

$$3 \text{ عضو داریم}$$

$$2^n = 2^3 = 8 = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

سوال: زیر مجموعه‌های مجموعه $A = \{\emptyset, 1, 2, 3\}$ را بنویسید:

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{\emptyset\}, A_3 = \{1\}$$

$$A_4 = \{\emptyset, 1\}, A_5 = \{\emptyset, 2\}, A_6 = \{\emptyset, 3\}$$

$$A_7 = \{1, 2\}, A_8 = \{1, 3\}, A_9 = \{2, 3\}$$

$$n = 4$$

$$4 \text{ عضو داریم}$$

$$2^n = 2^4 = 16 = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

سوال: دو مجموعه $A = \{a, b, c, \{c\}\}$ و $B = \{a, \{c\}\}$ داریم؛ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:

$$\{a, \{c\}\} = A \cap B \leftarrow B \subseteq A$$

$$B - A = \{\emptyset\} \quad ? \times$$

$$B - A = \emptyset$$

$$\{c\} \subseteq A \quad (\{c\} \in A) \quad c \subseteq A \quad ? \times$$

$$\{c, \{c\}\} \subseteq A \quad \text{و} \quad \{c\} \in A \quad \text{و} \quad c \in A \quad ? \checkmark$$

$$A \cup B = \{a, b, c, \{c\}\}$$

$$A - B = \{b, c\} \quad ? \checkmark$$

$$A - B = A - A \cap B = \{b, c\}$$

$$A - B \leftarrow A - B \cap A = \{b, c\} \quad ? \checkmark$$

$$\{c\} \in B \quad \text{و} \quad \{\{c\}\} \subseteq B \quad ? \checkmark$$

$$\emptyset \subseteq A - B \quad \text{و} \quad \emptyset \in A \quad ? \times$$

برای همه مجموعه‌ها صادق است

$$B \subseteq A \rightarrow A \cap B = B$$

$$B \subseteq A \rightarrow A \cup B = A$$

تذکر: توجه کنید که برای نشان دادن اینکه یک عضو جزء اعضای یک مجموعه است، نباید دو طرف آن عضو آکولاد اضافه کرد؛ اما برای زیرمجموعه نشان دادن باید آکولاد بگذاریم. مثال:

$$A = \{1, 2, \{2\}\} \rightarrow 1 \in A \rightarrow \{1\} \subseteq A \rightarrow \{1\} \notin A$$

$$\rightarrow 2 \in A \rightarrow \{2\} \subseteq A \rightarrow \{2\} \in A, \{\{2\}\} \subseteq A$$

سوال: اگر $A = \{a, \{b\}\}$ و $B = \{a, \{b\}\}$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟ (میکروقرن)

$A = \{\dots, \{a, \{b\}\}, \dots\}$

$\emptyset \subseteq A - B$ (✓) $B \in A$ (✗) $\{b\} \subseteq A$ (✓) $B \subseteq A$ (✓)

تذکر: B عضو A باشد باید خود B را به عنوان عضو A بنویسند.

سوال: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n-3$ عضوی از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+2$ عضوی، ۱۲۴ عدد کمتر است. یک مجموعه $n+1$ عضوی چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟ (تالیفی)

$n+2$ (۲) $n-3$ (۳) $n+1$ (۴)

$2^{n+2} - 2^{n-3} = 124 \Rightarrow 2^n \times 2^2 - 2^n \times 2^{-3} = 124$

$\Rightarrow 2^n (4 - \frac{1}{8}) = 124 \Rightarrow 2^n \times \frac{31}{8} = 124 \Rightarrow 2^n = 124 \times \frac{8}{31} = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$

تذکر: $2^n - 1 = 31 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های غیر تهی یک مجموعه n عضوی برابر $2^n - 1$ خواهد شد.

سوال: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه را دو برابر کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۵۶ واحد اضافه می‌شود، این مجموعه در حالت اول چند عضو داشته است؟ (کی کیو جامع)

$2^n - 2^{2n} = 56 \Rightarrow 2^n = t \Rightarrow t^2 - t - 56 = 0 \Rightarrow (t-8)(t+7) = 0$

$t = 8 \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$

$t = -7 \Rightarrow 2^n = -7$ (غیرممکن)

سوال: مجموعه $A = \{1, 2, 3, \{3, 1\}, \{5\}\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل عضو $\{1, 3\}$ باشد، ولی شامل عضو ۲ نباشد؟ (میکروقرن)

$A = \{1, 2, 3, \{1, 3\}\}$

زیرمجموعه‌ها: $2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$

تذکر: $\{1, 3\}$ یک عضو است.

سوال: کدام یک از مجموعه‌های زیر نشان دهنده مجموعه‌ای است که زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است؟ (تیزهوشان)

الف) اعداد اول بخش پذیر بر ۵ $\{5\}$ $\{5\} \subseteq \{5\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305, 310\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305, 310, 315\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305, 310, 315, 320\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305, 310, 315, 320, 325\}$ $\{5\} \subseteq \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300, 305, 310, 315, 320, 325, 330\}$ $\{5\$

نمایش مجموعه‌ها

برای نشان دادن مجموعه‌ها از سه شکل استفاده می‌شود:

(الف) نوشتن اعضا: مثلاً اگر مجموعه A شامل اعداد اول تک رقمی باشد:

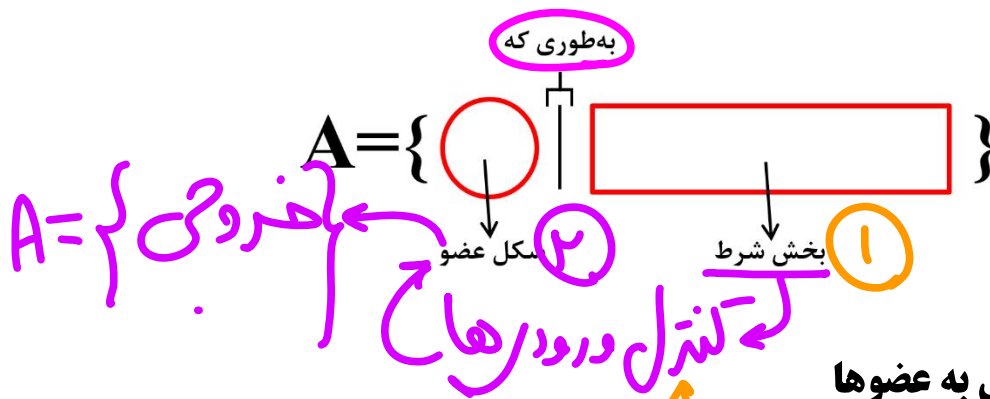
$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

(ب) نمودار ون (نمایش هندسی): در این روش اعضا را درون یک منحنی بسته نمایش می‌دهند. مثلاً اگر مجموعه B

شمارنده‌های عدد ۸ باشد:



(پ) زبان ریاضی: برای نمایش یک مجموعه مانند مجموعه A، از فرمول کلی زیر استفاده می‌کنیم:



تبدیل زبان ریاضی به اعضا

برای حل سوالات به زبان ریاضی، اول به قسمت شرط رفته و باز x یا n را پیدا کرده (ورودی‌ها مون!) و سپس به قسمت شکل عضو رفته و با جایگذاری، حاصل را پیدا می‌کنیم (خروجی‌ها مون!).

$$A = \{0\}$$

سوال: هر کدام از موارد زیر را معادل سازی کنید:

? $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ $\rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$

? $B = \{n(n-1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\rightarrow B = \{0, 2, 6, 12, \dots\}$

? $C = \{2x-1 \mid x \in \mathbb{Z}, 4 \leq 2x < 7\}$ $\rightarrow C = \{3, 5\}$

? $B = \{x \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}\}$ $\rightarrow B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

سوال: مجموعه $A = \{x^2 \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}, 2 < x < 10\}$ ، عضو دارد و بزرگترین عضو آن ؟
 (تیزهوشان)

۶۴ - ۳

۸۱ - ۷ (۳)

۸ - ۳ (۲)

۹ - ۷ (۱)

$\frac{x}{2} \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = 2, \frac{x}{2} = 3, \frac{x}{2} = 4$
 $x = 2, x = 4, x = 6, x = 8, x = 10$
 $A = \{16, 64, 36, 64\}$

سوال: اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{x} \in \mathbb{Z}\}$ و B مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی باشد، درباره مجموعه A-B کدام جمله نادرست است؟
 (مهرماه جامع)

(۲) عضوهای زوج هستند.

(۱) دو عضو دارد.

(۴) عضوهای مضرب ۱۲ هستند. ۲۴ و ۱۲

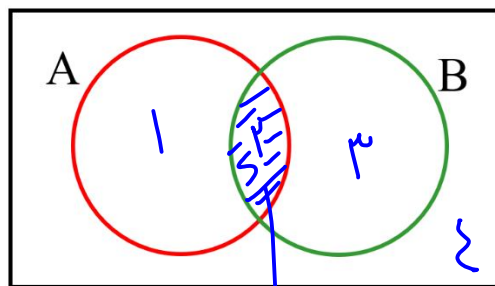
(۳) عضوهای مضرب ۸ هستند. ۱۲ و ۲۴

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A - B = A - (A \cap B)$
 $A - B = \{12, 24\}$

جبر مجموعه‌ها

شامل اشتراک، اجتماع و تفاضل مجموعه‌هاست. برای ساده‌تر کردن این مورد، فقط با استفاده از نمودار ون حل می‌کنیم.

۱- اشتراک: یعنی هم در A و هم در B باشد. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$



$A \cap B = \{2\}$

$A \cap B$



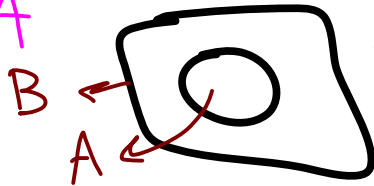
سوال: حاصل هر کدام از موارد زیر را بنویسید:

? $\emptyset \cap A = \emptyset$

? $A \cap \emptyset = \emptyset$

? $A \cap A = A$

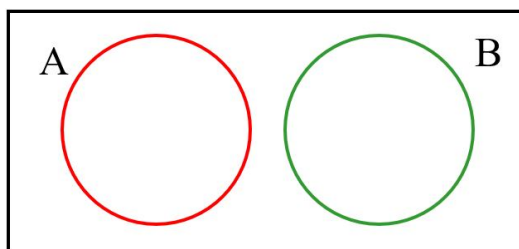
? $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$



کو صفا

نکته: اگر دو مجموعه هیچ اشتراکی نداشته باشند، آن دو مجموعه را نسبت به هم «مجزا» یا «ناسازگار» می‌گوییم.

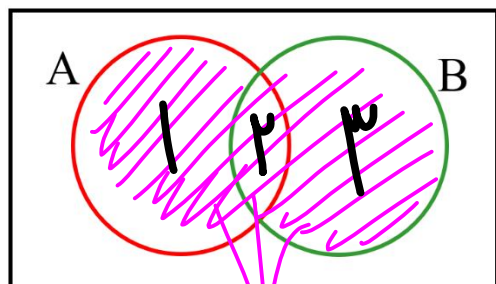
در این صورت $A \cap B = \emptyset$



$A \cap B = \emptyset$

$\begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$ مجموعه‌های ناسازگار

۲- اجتماع: یعنی یا در A باشد یا در B! $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$



$A \cup B = \{1, 2, 3\}$

$A \cup B$

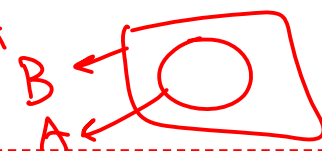
سوال: حاصل هر کدام از موارد زیر را بنویسید:

? $\emptyset \cup A = A$

? $A \cup \emptyset = A$

? $A \cup A = A$

? $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



بزرگ

۳- تفاضل: مثلاً $A - B$ یعنی تفاضل B از A (نه A از B) یعنی همه عضوهایی که در A باشند ولی در B نباشند.

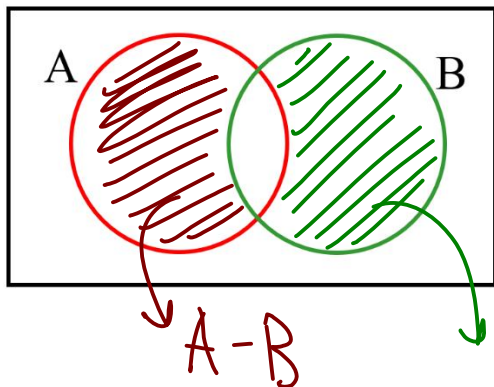
$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

$A - B$

تفاضل B از A: $A - B$

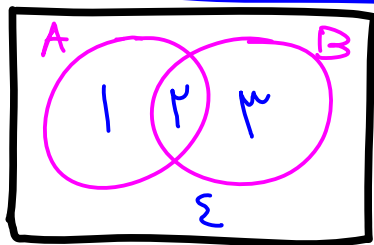


سوال: در نمودار ون، $A-B$ و $B-A$ را نشان دهید:



$$\begin{cases} A-B = A - A \cap B \\ B-A = B - A \cap B \end{cases}$$

سوال: حاصل عبارت روبرو کدام است؟ $[(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) \cap (A \cup B)]$ «تالیفی»



$A \cup B$

سوال: حاصل هر یک از موارد زیر را بنویسید:

? $A-B = A - A \cap B$

? $B-A = B - A \cap B$

? $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A-B = A$

? $A \subseteq B \Rightarrow A-B = \emptyset$

? $A-\emptyset = A$

? $A-A = \emptyset$

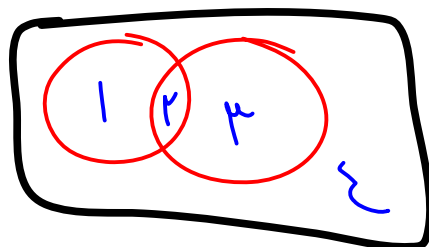
? $\emptyset - A = \emptyset$

نکته: چون اشتراک A و B درون خود A و B بوده و همچنین درون اجتماع آنهاست، پس می‌توان دو مورد زیر را

بیان کرد: (که به این دو قانون جذب می‌گویند)

? $A \cup (A \cap B) = \{1, 2\} = A$

? $A \cap (A \cup B) = A$



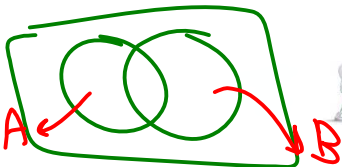
$A = \{1, 2\}$

سوال: اگر A مجموعه اعداد فرد تک رقمی و B مجموعه اعداد اول تک رقمی باشد، حاصل هر کدام از موارد زیر را بنویسید:

? $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$? $B = \{2, 3, 5, 7\}$

? $A \cap B = \{3, 5, 7\}$? $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

? $B - A = \{2\}$? $A - B = \{1, 9\}$



? $A - (A \cap B) = \{1, 9\}$? $A - (A \cup B) = \{\} = \emptyset$

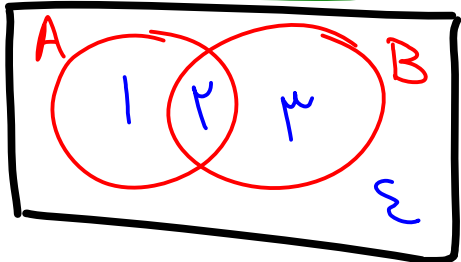
? $A \cup (A \cap B) = A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$? $A \cap (A \cup B) = A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

قانون جذب

سوال: اگر دو مجموعه A و B غیر تهی باشند، حاصل $(B - A) \cap (A \cup B)$ کدام است؟

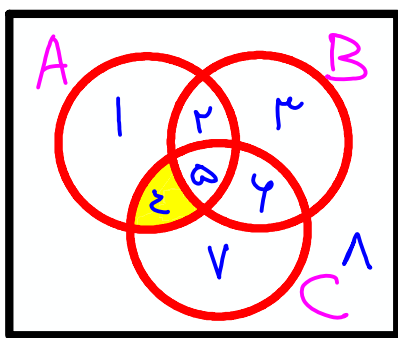
$A \cup B = \{1, 2, 3\}$ $B - A = \{3\}$ $A - B = \{1, 2\}$

$(B - A) \cap (A \cup B) = \{3\}$



سوال: برای سه مجموعه A ، B و C ، نمودار مقابل کدام یک از مجموعه‌های زیر را مشخص نمی‌کند؟ «آی کیو»

$\{4\}$



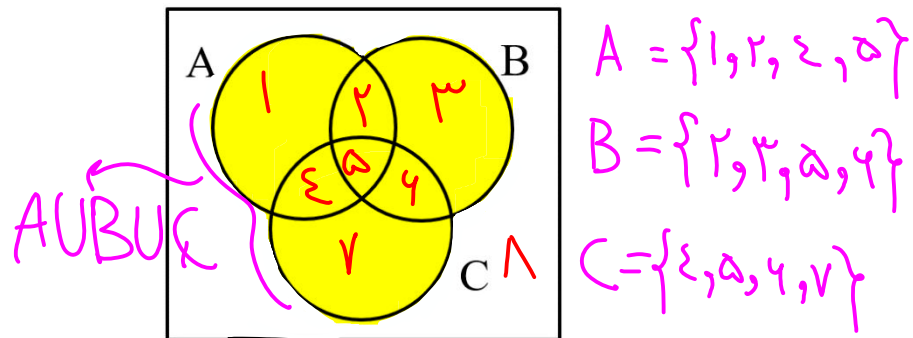
$(A \cap C) - B = \{5\}$

$C \cap (A - B) = \{5\}$

$(B \cap C) - A = \{6\}$

$(A \cap C) - (B \cap C) = \{5\}$

سوال: اجتماع سه مجموعه A، B و C را با توجه به نمودار زیر بنویسید:



$$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C$$

Handwritten calculations for the intersections:
 $A \cap B = \{2, 3, 5\}$
 $B \cap C = \{3, 4, 5\}$
 $A \cap C = \{2, 4, 5\}$
 $A \cap B \cap C = \{5\}$

سوال: A مجموعه اعداد اول یک رقمی، $B = \{x+1 | x \in A\}$ و $C = \{x | (2x+3) \in B\}$ است. محاسبه کنید که مجموعه $C \cup (A - B)$ چند عضو دارد؟

آی کیو جامع

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{3, 4, 6, 8\}$

$C \rightarrow 2x+3 = B$ اعضا

$$\begin{cases} 2x+3=3 \rightarrow x=0 \\ 2x+3=4 \rightarrow x=0.5 \\ 2x+3=6 \rightarrow x=1.5 \\ 2x+3=8 \rightarrow x=2.5 \end{cases}$$

$\Rightarrow C = \{0, 1, 2\}$

$A - A \cap B$
 $\downarrow$
 $\{2, 5, 7\}$

سوال: اگر $A_n = \{2^m | m \in \mathbb{Z}, m \geq -n, 2^m \leq n\}$ باشد ($n \in \mathbb{N}$)، آنگاه مجموعه $A_3 \cap A_5$ چند زیرمجموعه دارد؟

$A_3 = \{2^m | m \in \mathbb{Z}, m \geq -3, 2^m \leq 3\}$

Handwritten calculation for A_3 :
 $m = -3, -2, -1, 0, 1$
 $2^{-3} = 1/8, 2^{-2} = 1/4, 2^{-1} = 1/2, 2^0 = 1, 2^1 = 2$
 $A_3 = \{1/8, 1/4, 1/2, 1, 2\}$

Handwritten calculation for A_5 :
 $m = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$
 $2^{-5} = 1/32, 2^{-4} = 1/16, 2^{-3} = 1/8, 2^{-2} = 1/4, 2^{-1} = 1/2, 2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4$
 $A_5 = \{1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$

$A_3 \cap A_5 = \{1/8, 1/4, 1/2, 1, 2\}$

سوال: با فرض $A = \{x+y | x, y \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{x^2-y^2 | x, y \in \mathbb{Z}\}$ ، اگر $A-B=B-A$ باشد، کدام است؟

$A = B$

Handwritten proof:
 $x+y = 2 \rightarrow x+y=2$
 $x^2-y^2=1 \rightarrow (x-y)(x+y)=1$
 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1.5 \\ y=0.5 \end{cases}$

Venn diagrams showing the relationship between sets A and B.

مجموعه‌های معروف

اعداد صحیح مثبت $\rightarrow N = \{1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

اعداد صحیح نامنفی $\rightarrow W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد حسابی

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

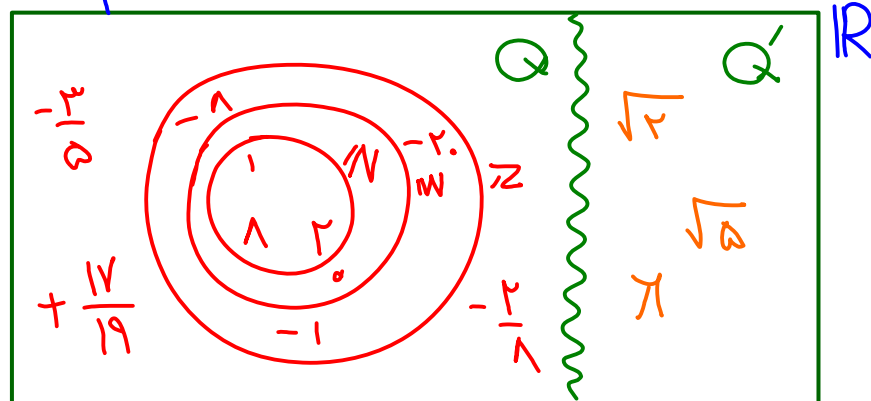
مجموعه اعداد گویا $Q = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$ مثال: $\frac{4}{1}, -\frac{2}{3}, -\frac{17}{19}$

مجموعه اعداد گنگ (أصم) $Q' = \{x \mid x \in R, x \notin Q\}$ مثال: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{17}$

مجموعه اعداد حقیقی $R = \{x \mid x \in Q \vee x \in Q'\} = Q \cup Q'$

نکته: مجموعه اعداد حقیقی (R) بزرگ‌ترین مجموعه اعداد در حد کنکور است (شامل همه اعداد روی محور اعداد)؛

با استفاده از نمودار ون داریم:



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \quad \{Q \cap Q' = \emptyset\} \quad Q \cup Q' = R$$

$$W - N = \{0\}$$

سوال: حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را بنویسید:

$W \cap N = N = \{1, 2, 3, \dots\}$

$W - \{0\} = N = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\sqrt{0.04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \sqrt{(\frac{2}{10})^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \in Q$

سوال: درستی یا نادرستی هر کدام از عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

$W \subseteq \mathbb{R} \cap Q'$ $\times$ $Q' \subseteq \mathbb{R}$
 $Q \cap Q' \subseteq W$ $\checkmark$
 $([\{0\} \cup \mathbb{N}] - W) \subseteq \mathbb{Z}$ $\checkmark$
 $((Q - Q') - \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}$ $\checkmark$

$\emptyset \rightarrow$ زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

انواع اعداد گویا در حالت اعشاری

۱- عدد اعشاری مختوم (تحقیقی): اگر تعداد رقم‌های اعشاری محدود باشد، یک عدد اعشاری مختوم داریم. مثل:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{16}{25} = 0.64$$

۲- عدد اعشاری متناوب ساده: اگر بلافاصله بعد از ممیز یک یا چند عدد تکرار شوند، یک عدد اعشاری متناوب ساده داریم. مثل:

$$\frac{1}{3} = 0.333333... = 0.\overline{3}$$

$$\frac{3}{11} = 0.272727... = 0.\overline{27}$$

$$\frac{9}{11} = 0.818181... = 0.\overline{81}$$

۳- عدد اعشاری متناوب مرکب: اگر بعد از ممیز یک یا چند عدد غیرتکراری و بعد از آن تعدادی رقم تکرار شوند داشته باشیم، یک عدد اعشاری متناوب مرکب داریم. مثل:

$$\frac{17}{55} = 0.3090909... = 0.3\overline{09}$$

$$\frac{15}{22} = 0.6818181... = 0.6\overline{81}$$

نکته: این سه مورد همگی جزء اعداد گویا هستند. اعداد اعشاری با ارقام متفاوت و غیرتکرارشونده به اعداد گنگ تعلق دارند.

$$0.3812573... \in Q'$$

اعمال جبری بر روی اعداد گنگ و گویا

جمع، ضرب، تقسیم و تفریق بین دو عدد گویا قطعاً عددی گویاست (فقط باید توجه کنیم که کسر صفر نشود). در جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو عدد گنگ هیچ نظری نمیتوان داد.

اگر A عددی گویا و B عددی گنگ باشد، اگر $A \pm B$ کسر صفر نشود قطعاً $A \pm B$ گنگ خواهند بود.

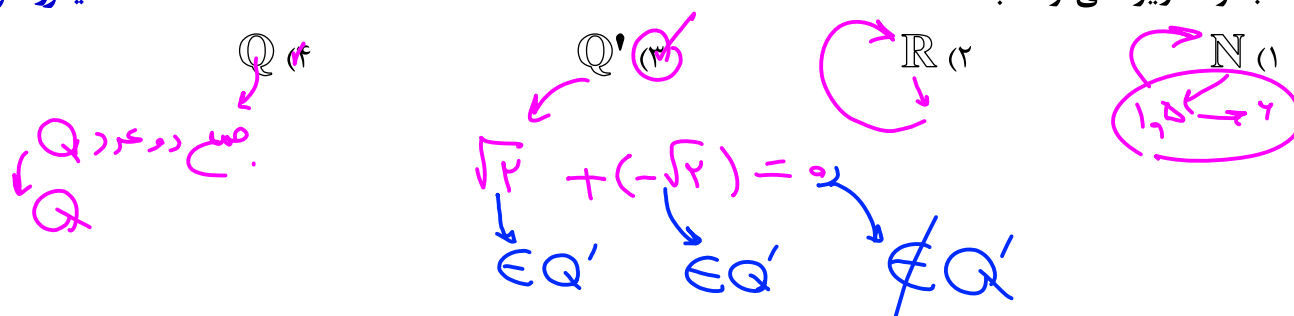
سوال: اگر A و B اعداد گنگ و C و D اعداد گویا باشند، حاصل چند مورد می تواند گویا باشد؟

[illegible]

$$\Rightarrow A^2 + 2A = A(A + 2) = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

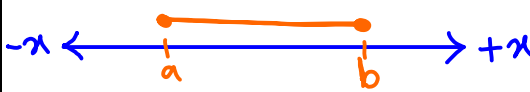
سوال: اگر a و b دو عضو دلخواه از مجموعه M باشند به طوری که $a + b \in M$ ، در این صورت M کدام

مجموعه زیر نمی تواند باشد؟



بازہ

به زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که بین دو عدد حقیقی باشد، بازه می‌گویند. جدول زیر را تکمیل کنید:

نمایش هندسی (محور)	نمایش مجموعه‌ای	نوع بازه	بازه
	$\{x x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	باز	(a, b)
	$\{x x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	بسته	$[a, b]$
	$\{x x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	نیم باز	$(a, b]$
	$\{x x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	نیم باز	$[a, b)$
	$\{x x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$	نیم باز	$(-\infty, b]$

$(a, +\infty)$	باز	$\{x x \in \mathbb{R}, x > a\}$	
$[b, +\infty)$	بسته باز	$\{x x \in \mathbb{R}, x \geq b\}$	
$(-\infty, +\infty)$	باز	$\mathbb{R}$	

نکته: دقت شود که اگر بیش از یک بازه را با هم در نظر بگیریم، دیگر به آن بازه نمی‌گوییم؛ بلکه به آن اجتماع دو بازه می‌گوییم. جدول را تکمیل کنید:

مثال	نمایش بازه‌ای	نمایش هندسی (محور)
$\mathbb{R} - [1, 2]$	$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$	
$\mathbb{R} - [1, 2)$	$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$	
$\mathbb{R} - (1, 2)$	$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ $\{x x \in \mathbb{R}, x \leq 1 \vee x \geq 2\}$	
$\mathbb{R} - \{1, 2\}$	$(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$	
$[1, +\infty) - \{3\}$	$[1, 3) \cup (3, +\infty)$	
$\mathbb{Z} - \{1, 2\}$	$\{\dots, -2, -1, 0, 3, 4, \dots\}$	
$[1, 2] - (1, 2)$	$\{1, 2\}$	

نکته: توجه کنید که بازه $[A, A]$ همان $\{A\}$ و بازه (a, a) همان $\emptyset$ است. پس هر دو مورد بازه هستند (بازه هم که نوعی مجموعه است).

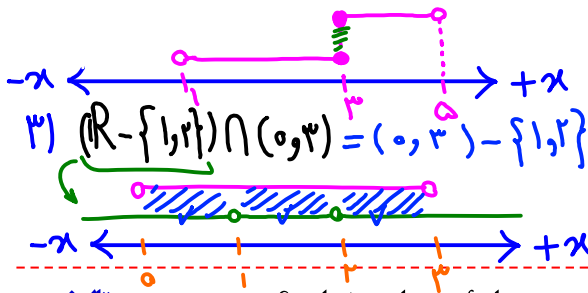
$$L = \{\} = \emptyset$$

$$K = \{A\}$$

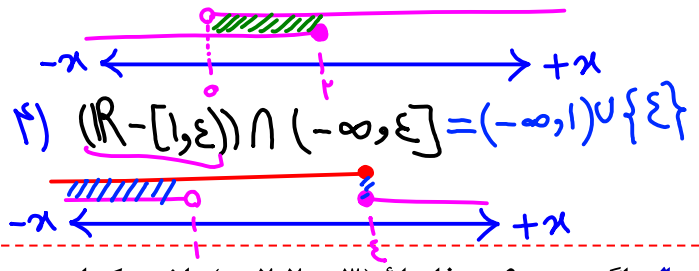
۱) $(1, 3] \cap [2, 5) = \{2, 3\}$

سوال: در هر یک از موارد زیر اشتراک دو بازه را پیدا کنید:

۲) $(-\infty, 2] \cap (0, +\infty) = (0, 2]$



۳) $(\mathbb{R} - \{1, 2\}) \cap (0, 3) = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$



۴) $(\mathbb{R} - [1, 4]) \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 1) \cup \{4\}$

سوال: اگر عدد ۶ در فاصله $(x-2, 2x+3)$ باشد، کدام عدد در حدود بازه x جایی ندارد؟ «تالیفی»

$6 \in (x-2, 2x+3) \rightarrow x-2 < 6 < 2x+3$

① $x-2 < 6 \rightarrow x < 8$

② $6 < 2x+3 \rightarrow 2x > 3 \rightarrow x > 1.5$

استخراج: $(1.5, 8)$

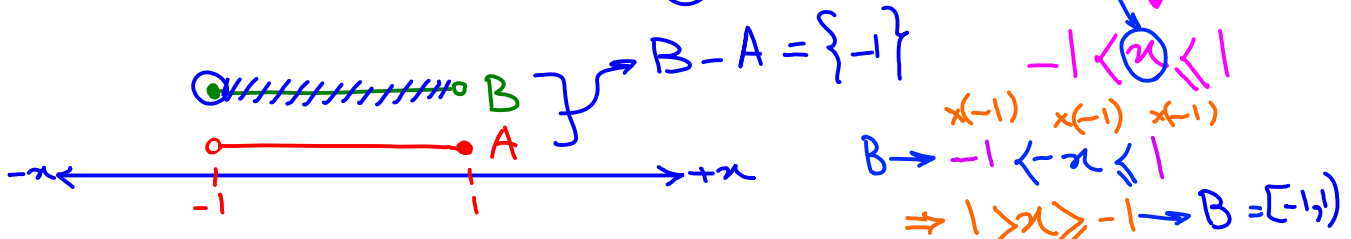
سوال: بازه $(\frac{x+2}{4}$ و $3)$ دقیقاً شامل پنج عدد صحیح است. بیشترین مقدار x کدام است؟ «میکرو-قرن»

بزرگترین: 3.4 (۲)
 $3.4 \times 4 = 13.6$
 $13.6 - 2 = 11.6$
 $11.6 - 1 = 10.6$
 $10.6 - 1 = 9.6$
 $9.6 - 1 = 8.6$
 $8.6 - 1 = 7.6$
 $7.6 - 1 = 6.6$
 $6.6 - 1 = 5.6$
 $5.6 - 1 = 4.6$
 $4.6 - 1 = 3.6$
 $3.6 - 1 = 2.6$
 $2.6 - 1 = 1.6$
 $1.6 - 1 = 0.6$
 $0.6 - 1 = -0.4$
 $-0.4 - 1 = -1.4$
 $-1.4 - 1 = -2.4$
 $-2.4 - 1 = -3.4$
 $-3.4 - 1 = -4.4$
 $-4.4 - 1 = -5.4$
 $-5.4 - 1 = -6.4$
 $-6.4 - 1 = -7.4$
 $-7.4 - 1 = -8.4$
 $-8.4 - 1 = -9.4$
 $-9.4 - 1 = -10.4$
 $-10.4 - 1 = -11.4$
 $-11.4 - 1 = -12.4$
 $-12.4 - 1 = -13.4$
 $-13.4 - 1 = -14.4$
 $-14.4 - 1 = -15.4$
 $-15.4 - 1 = -16.4$
 $-16.4 - 1 = -17.4$
 $-17.4 - 1 = -18.4$
 $-18.4 - 1 = -19.4$
 $-19.4 - 1 = -20.4$
 $-20.4 - 1 = -21.4$
 $-21.4 - 1 = -22.4$
 $-22.4 - 1 = -23.4$
 $-23.4 - 1 = -24.4$
 $-24.4 - 1 = -25.4$
 $-25.4 - 1 = -26.4$
 $-26.4 - 1 = -27.4$
 $-27.4 - 1 = -28.4$
 $-28.4 - 1 = -29.4$
 $-29.4 - 1 = -30.4$
 $-30.4 - 1 = -31.4$
 $-31.4 - 1 = -32.4$
 $-32.4 - 1 = -33.4$
 $-33.4 - 1 = -34.4$
 $-34.4 - 1 = -35.4$
 $-35.4 - 1 = -36.4$
 $-36.4 - 1 = -37.4$
 $-37.4 - 1 = -38.4$
 $-38.4 - 1 = -39.4$
 $-39.4 - 1 = -40.4$
 $-40.4 - 1 = -41.4$
 $-41.4 - 1 = -42.4$
 $-42.4 - 1 = -43.4$
 $-43.4 - 1 = -44.4$
 $-44.4 - 1 = -45.4$
 $-45.4 - 1 = -46.4$
 $-46.4 - 1 = -47.4$
 $-47.4 - 1 = -48.4$
 $-48.4 - 1 = -49.4$
 $-49.4 - 1 = -50.4$
 $-50.4 - 1 = -51.4$
 $-51.4 - 1 = -52.4$
 $-52.4 - 1 = -53.4$
 $-53.4 - 1 = -54.4$
 $-54.4 - 1 = -55.4$
 $-55.4 - 1 = -56.4$
 $-56.4 - 1 = -57.4$
 $-57.4 - 1 = -58.4$
 $-58.4 - 1 = -59.4$
 $-59.4 - 1 = -60.4$
 $-60.4 - 1 = -61.4$
 $-61.4 - 1 = -62.4$
 $-62.4 - 1 = -63.4$
 $-63.4 - 1 = -64.4$
 $-64.4 - 1 = -65.4$
 $-65.4 - 1 = -66.4$
 $-66.4 - 1 = -67.4$
 $-67.4 - 1 = -68.4$
 $-68.4 - 1 = -69.4$
 $-69.4 - 1 = -70.4$
 $-70.4 - 1 = -71.4$
 $-71.4 - 1 = -72.4$
 $-72.4 - 1 = -73.4$
 $-73.4 - 1 = -74.4$
 $-74.4 - 1 = -75.4$
 $-75.4 - 1 = -76.4$
 $-76.4 - 1 = -77.4$
 $-77.4 - 1 = -78.4$
 $-78.4 - 1 = -79.4$
 $-79.4 - 1 = -80.4$
 $-80.4 - 1 = -81.4$
 $-81.4 - 1 = -82.4$
 $-82.4 - 1 = -83.4$
 $-83.4 - 1 = -84.4$
 $-84.4 - 1 = -85.4$
 $-85.4 - 1 = -86.4$
 $-86.4 - 1 = -87.4$
 $-87.4 - 1 = -88.4$
 $-88.4 - 1 = -89.4$
 $-89.4 - 1 = -90.4$
 $-90.4 - 1 = -91.4$
 $-91.4 - 1 = -92.4$
 $-92.4 - 1 = -93.4$
 $-93.4 - 1 = -94.4$
 $-94.4 - 1 = -95.4$
 $-95.4 - 1 = -96.4$
 $-96.4 - 1 = -97.4$
 $-97.4 - 1 = -98.4$
 $-98.4 - 1 = -99.4$
 $-99.4 - 1 = -100.4$
 $-100.4 - 1 = -101.4$
 $-101.4 - 1 = -102.4$
 $-102.4 - 1 = -103.4$
 $-103.4 - 1 = -104.4$
 $-104.4 - 1 = -105.4$
 $-105.4 - 1 = -106.4$
 $-106.4 - 1 = -107.4$
 $-107.4 - 1 = -108.4$
 $-108.4 - 1 = -109.4$
 $-109.4 - 1 = -110.4$
 $-110.4 - 1 = -111.4$
 $-111.4 - 1 = -112.4$
 $-112.4 - 1 = -113.4$
 $-113.4 - 1 = -114.4$
 $-114.4 - 1 = -115.4$
 $-115.4 - 1 = -116.4$
 $-116.4 - 1 = -117.4$
 $-117.4 - 1 = -118.4$
 $-118.4 - 1 = -119.4$
 $-119.4 - 1 = -120.4$
 $-120.4 - 1 = -121.4$
 $-121.4 - 1 = -122.4$
 $-122.4 - 1 = -123.4$
 $-123.4 - 1 = -124.4$
 $-124.4 - 1 = -125.4$
 $-125.4 - 1 = -126.4$
 $-126.4 - 1 = -127.4$
 $-127.4 - 1 = -128.4$
 $-128.4 - 1 = -129.4$
 $-129.4 - 1 = -130.4$
 $-130.4 - 1 = -131.4$
 $-131.4 - 1 = -132.4$
 $-132.4 - 1 = -133.4$
 $-133.4 - 1 = -134.4$
 $-134.4 - 1 = -135.4$
 $-135.4 - 1 = -136.4$
 $-136.4 - 1 = -137.4$
 $-137.4 - 1 = -138.4$
 $-138.4 - 1 = -139.4$
 $-139.4 - 1 = -140.4$
 $-140.4 - 1 = -141.4$
 $-141.4 - 1 = -142.4$
 $-142.4 - 1 = -143.4$
 $-143.4 - 1 = -144.4$
 $-144.4 - 1 = -145.4$
 $-145.4 - 1 = -146.4$
 $-146.4 - 1 = -147.4$
 $-147.4 - 1 = -148.4$
 $-148.4 - 1 = -149.4$
 $-149.4 - 1 = -150.4$
 $-150.4 - 1 = -151.4$
 $-151.4 - 1 = -152.4$
 $-152.4 - 1 = -153.4$
 $-153.4 - 1 = -154.4$
 $-154.4 - 1 = -155.4$
 $-155.4 - 1 = -156.4$
 $-156.4 - 1 = -157.4$
 $-157.4 - 1 = -158.4$
 $-158.4 - 1 = -159.4$
 $-159.4 - 1 = -160.4$
 $-160.4 - 1 = -161.4$
 $-161.4 - 1 = -162.4$
 $-162.4 - 1 = -163.4$
 $-163.4 - 1 = -164.4$
 $-164.4 - 1 = -165.4$
 $-165.4 - 1 = -166.4$
 $-166.4 - 1 = -167.4$
 $-167.4 - 1 = -168.4$
 $-168.4 - 1 = -169.4$
 $-169.4 - 1 = -170.4$
 $-170.4 - 1 = -171.4$
 $-171.4 - 1 = -172.4$
 $-172.4 - 1 = -173.4$
 $-173.4 - 1 = -174.4$
 $-174.4 - 1 = -175.4$
 $-175.4 - 1 = -176.4$
 $-176.4 - 1 = -177.4$
 $-177.4 - 1 = -178.4$
 $-178.4 - 1 = -179.4$
 $-179.4 - 1 = -180.4$
 $-180.4 - 1 = -181.4$
 $-181.4 - 1 = -182.4$
 $-182.4 - 1 = -183.4$
 $-183.4 - 1 = -184.4$
 $-184.4 - 1 = -185.4$
 $-185.4 - 1 = -186.4$
 $-186.4 - 1 = -187.4$
 $-187.4 - 1 = -188.4$
 $-188.4 - 1 = -189.4$
 $-189.4 - 1 = -190.4$
 $-190.4 - 1 = -191.4$
 $-191.4 - 1 = -192.4$
 $-192.4 - 1 = -193.4$
 $-193.4 - 1 = -194.4$
 $-194.4 - 1 = -195.4$
 $-195.4 - 1 = -196.4$
 $-196.4 - 1 = -197.4$
 $-197.4 - 1 = -198.4$
 $-198.4 - 1 = -199.4$
 $-199.4 - 1 = -200.4$
 $-200.4 - 1 = -201.4$
 $-201.4 - 1 = -202.4$
 $-202.4 - 1 = -203.4$
 $-203.4 - 1 = -204.4$
 $-204.4 - 1 = -205.4$
 $-205.4 - 1 = -206.4$
 $-206.4 - 1 = -207.4$
 $-207.4 - 1 = -208.4$
 $-208.4 - 1 = -209.4$
 $-209.4 - 1 = -210.4$
 $-210.4 - 1 = -211.4$
 $-211.4 - 1 = -212.4$
 $-212.4 - 1 = -213.4$
 $-213.4 - 1 = -214.4$
 $-214.4 - 1 = -215.4$
 $-215.4 - 1 = -216.4$
 $-216.4 - 1 = -217.4$
 $-217.4 - 1 = -218.4$
 $-218.4 - 1 = -219.4$
 $-219.4 - 1 = -220.4$
 $-220.4 - 1 = -221.4$
 $-221.4 - 1 = -222.4$
 $-222.4 - 1 = -223.4$
 $-223.4 - 1 = -224.4$
 $-224.4 - 1 = -225.4$
 $-225.4 - 1 = -226.4$
 $-226.4 - 1 = -227.4$
 $-227.4 - 1 = -228.4$
 $-228.4 - 1 = -229.4$
 $-229.4 - 1 = -230.4$
 $-230.4 - 1 = -231.4$
 $-231.4 - 1 = -232.4$
 $-232.4 - 1 = -233.4$
 $-233.4 - 1 = -234.4$
 $-234.4 - 1 = -235.4$
 $-235.4 - 1 = -236.4$
 $-236.4 - 1 = -237.4$
 $-237.4 - 1 = -238.4$
 $-238.4 - 1 = -239.4$
 $-239.4 - 1 = -240.4$
 $-240.4 - 1 = -241.4$
 $-241.4 - 1 = -242.4$
 $-242.4 - 1 = -243.4$
 $-243.4 - 1 = -244.4$
 $-244.4 - 1 = -245.4$
 $-245.4 - 1 = -246.4$
 $-246.4 - 1 = -247.4$
 $-247.4 - 1 = -248.4$
 $-248.4 - 1 = -249.4$
 $-249.4 - 1 = -250.4$
 $-250.4 - 1 = -251.4$
 $-251.4 - 1 = -252.4$
 $-252.4 - 1 = -253.4$
 $-253.4 - 1 = -254.4$
 $-254.4 - 1 = -255.4$
 $-255.4 - 1 = -256.4$
 $-256.4 - 1 = -257.4$
 $-257.4 - 1 = -258.4$
 $-258.4 - 1 = -259.4$
 $-259.4 - 1 = -260.4$
 $-260.4 - 1 = -261.4$
 $-261.4 - 1 = -262.4$
 $-262.4 - 1 = -263.4$
 $-263.4 - 1 = -264.4$
 $-264.4 - 1 = -265.4$
 $-265.4 - 1 = -266.4$
 $-266.4 - 1 = -267.4$
 $-267.4 - 1 = -268.4$
 $-268.4 - 1 = -269.4$
 $-269.4 - 1 = -270.4$
 $-270.4 - 1 = -271.4$
 $-271.4 - 1 = -272.4$
 $-272.4 - 1 = -273.4$
 $-273.4 - 1 = -274.4$
 $-274.4 - 1 = -275.4$
 $-275.4 - 1 = -276.4$
 $-276.4 - 1 = -277.4$
 $-277.4 - 1 = -278.4$
 $-278.4 - 1 = -279.4$
 $-279.4 - 1 = -280.4$
 $-280.4 - 1 = -281.4$
 $-281.4 - 1 = -282.4$
 $-282.4 - 1 = -283.4$
 $-283.4 - 1 = -284.4$
 $-284.4 - 1 = -285.4$
 $-285.4 - 1 = -286.4$
 $-286.4 - 1 = -287.4$
 $-287.4 - 1 = -288.4$
 $-288.4 - 1 = -289.4$
 $-289.4 - 1 = -290.4$
 $-290.4 - 1 = -291.4$
 $-291.4 - 1 = -292.4$
 $-292.4 - 1 = -293.4$
 $-293.4 - 1 = -294.4$
 $-294.4 - 1 = -295.4$
 $-295.4 - 1 = -296.4$
 $-296.4 - 1 = -297.4$
 $-297.4 - 1 = -298.4$
 $-298.4 - 1 = -299.4$
 $-299.4 - 1 = -300.4$
 $-300.4 - 1 = -301.4$
 $-301.4 - 1 = -302.4$
 $-302.4 - 1 = -303.4$
 $-303.4 - 1 = -304.4$
 $-304.4 - 1 = -305.4$
 $-305.4 - 1 = -306.4$
 $-306.4 - 1 = -307.4$
 $-307.4 - 1 = -308.4$
 $-308.4 - 1 = -309.4$
 $-309.4 - 1 = -310.4$
 $-310.4 - 1 = -311.4$
 $-311.4 - 1 = -312.4$
 $-312.4 - 1 = -313.4$
 $-313.4 - 1 = -314.4$
 $-314.4 - 1 = -315.4$
 $-315.4 - 1 = -316.4$
 $-316.4 - 1 = -317.4$
 $-317.4 - 1 = -318.4$
 $-318.4 - 1 = -319.4$
 $-319.4 - 1 = -320.4$
 $-320.4 - 1 = -321.4$
 $-321.4 - 1 = -322.4$
 $-322.4 - 1 = -323.4$
 $-323.4 - 1 = -324.4$
 $-324.4 - 1 = -325.4$
 $-325.4 - 1 = -326.4$
 $-326.4 - 1 = -327.4$
 $-327.4 - 1 = -328.4$
 $-328.4 - 1 = -329.4$
 $-329.4 - 1 = -330.4$
 $-330.4 - 1 = -331.4$
 $-331.4 - 1 = -332.4$
 $-332.4 - 1 = -333.4$
 $-333.4 - 1 = -334.4$
 $-334.4 - 1 = -335.4$
 $-335.4 - 1 = -336.4$
 $-336.4 - 1 = -337.4$
 $-337.4 - 1 = -338.4$
 $-338.4 - 1 = -339.4$
 $-339.4 - 1 = -340.4$
 $-340.4 - 1 = -341.4$
 $-341.4 - 1 = -342.4$
 $-342.4 - 1 = -343.4$
 $-343.4 - 1 = -344.4$
 $-344.4 - 1 = -345.4$
 $-345.4 - 1 = -346.4$
 $-346.4 - 1 = -347.4$
 $-347.4 - 1 = -348.4$
 $-348.4 - 1 = -349.4$
 $-349.4 - 1 = -350.4$
 $-350.4 - 1 = -351.4$
 $-351.4 - 1 = -352.4$
 $-352.4 - 1 = -353.4$
 $-353.4 - 1 = -354.4$
 $-354.4 - 1 = -355.4$
 $-355.4 - 1 = -356.4$
 $-356.4 - 1 = -357.4$
 $-357.4 - 1 = -358.4$
 $-358.4 - 1 = -359.4$
 $-359.4 - 1 = -360.4$
 $-360.4 - 1 = -361.4$
 $-361.4 - 1 = -362.4$
 $-362.4 - 1 = -363.4$
 $-363.4 - 1 = -364.4$
 $-364.4 - 1 = -365.4$
 $-365.4 - 1 = -366.4$
 $-366.4 - 1 = -367.4$
 $-367.4 - 1 = -368.4$
 $-368.4 - 1 = -369.4$
 $-369.4 - 1 = -370.4$
 $-370.4 - 1 = -371.4$
 $-371.4 - 1 = -372.4$
 $-372.4 - 1 = -373.4$
 $-373.4 - 1 = -374.4$
 $-374.4 - 1 = -375.4$
 $-375.4 - 1 = -376.4$
 $-376.4 - 1 = -377.4$
 $-377.4 - 1 = -378.4$
 $-378.4 - 1 = -379.4$
 $-379.4 - 1 = -380.4$
 $-380.4 - 1 = -381.4$
 $-381.4 - 1 = -382.4$
 $-382.4 - 1 = -383.4$
 $-383.4 - 1 = -384.4$
 $-384.4 - 1 = -385.4$
 $-385.4 - 1 = -386.4$
 $-386.4 - 1 = -387.4$
 $-387.4 - 1 = -388.4$
 $-388.4 - 1 = -389.4$
 $-389.4 - 1 = -390.4$
 $-390.4 - 1 = -391.4$
 $-391.4 - 1 = -392.4$
 $-392.4 - 1 = -393.4$
 $-393.4 - 1 = -394.4$
 $-394.4 - 1 = -395.4$
 $-395.4 - 1 = -396.4$
 $-396.4 - 1 = -397.4$
 $-397.4 - 1 = -398.4$
 $-398.4 - 1 = -399.4$
 $-399.4 - 1 = -400.4$
 $-400.4 - 1 = -401.4$
 $-401.4 - 1 = -402.4$
 $-402.4 - 1 = -403.4$
 $-403.4 - 1 = -404.4$
 $-404.4 - 1 = -405.4$
 $-405.4 - 1 = -406.4$
 $-406.4 - 1 = -407.4$
 $-407.4 - 1 = -408.4$
 $-408.4 - 1 = -409.4$
 $-409.4 - 1 = -410.4$
 $-410.4 - 1 = -411.4$
 $-411.4 - 1 = -412.4$
 $-412.4 - 1 = -413.4$
 $-413.4 - 1 = -414.4$
 $-414.4 - 1 = -415.4$
 $-415.4 - 1 = -416.4$
 $-416.4 - 1 = -417.4$
 $-417.4 - 1 = -418.4$
 $-418.4 - 1 = -419.4$
 $-419.4 - 1 = -420.4$
 $-420.4 - 1 = -421.4$
 $-421.4 - 1 = -422.4$
 $-422.4 - 1 = -423.4$
 $-423.4 - 1 = -424.4$
 $-424.4 - 1 = -425.4$
 $-425.4 - 1 = -426.4$
 $-426.4 - 1 = -427.4$
 $-427.4 - 1 = -428.4$
 $-428.4 - 1 = -429.4$
 $-429.4 - 1 = -430.4$
 $-430.4 - 1 = -431.4$
 $-431.4 - 1 = -432.4$
 $-432.4 - 1 = -433.4$
 $-433.4 - 1 = -434.4$
 $-434.4 - 1 = -435.4$
 $-435.4 - 1 = -436.4$
 $-436.4 - 1 = -437.4$
 $-437.4 - 1 = -438.4$
 $-438.4 - 1 = -439.4$
 $-439.4 - 1 = -440.4$
 $-440.4 - 1 = -441.4$
 $-441.4 - 1 = -442.4$
 $-442.4 - 1 = -443.4$
 $-443.4 - 1 = -444.4$
 $-444.4 - 1 = -445.4$
 $-445.4 - 1 = -446.4$
 $-446.4 - 1 = -447.4$
 $-447.4 - 1 = -448.4$
 $-448.4 - 1 = -449.4$
 $-449.4 - 1 = -450.4$
 $-450.4 - 1 = -451.4$
 $-451.4 - 1 = -452.4$
 $-452.4 - 1 = -453.4$
 $-453.4 - 1 = -454.4$
 $-454.4 - 1 = -455.4$
 $-455.4 - 1 = -456.4$
 $-456.4 - 1 = -457.4$
 $-457.4 - 1 = -458.4$
 $-458.4 - 1 = -459.4$
 $-459.4 - 1 = -460.4$
 $-460.4 - 1 = -461.4$
 $-461.4 - 1$

«آی کیو جامع»

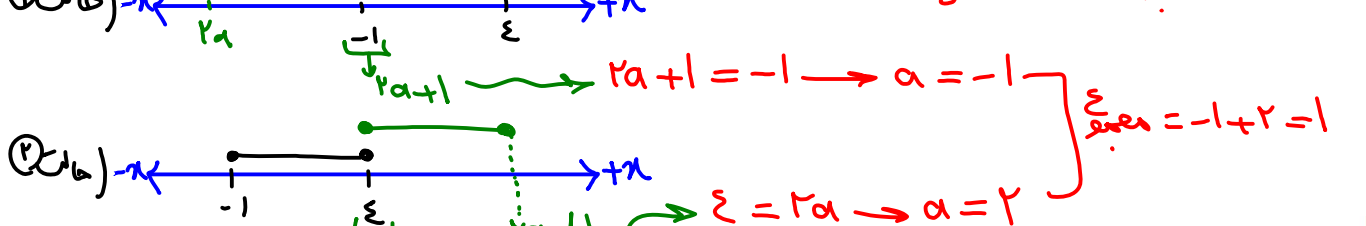
سوال: اگر $A = (-1, 1]$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x) \in A\}$ باشد، مجموعه $B - A$ کدام است؟

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\{-1, 1\}$ (۳) $\{-1\}$ (۴) $\{\}$



«میکرو-قرن»

سوال: اگر $\{k\} = [2a, 2a+1] \cap [-1, 4]$ باشد، مقادیر ممکن برای a کدام است؟



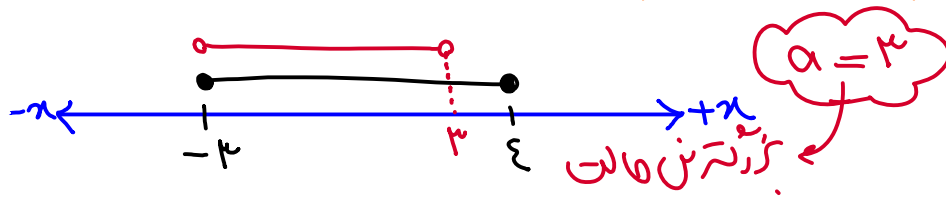
نکته: برای محاسبه طول یک بازه کافی است انتهای آن را منهای ابتدای آن کنیم (چه بازه باز باشد، چه نیم باز و چه بسته).

سوال: هر گاه $(-a, a) \subseteq [-3, 4]$ بوده و a بزرگ ترین مقدار ممکن خود باشد، در این صورت کدام گزینه درست است؟

«مهرماه»

- (۱) $(1, a) \subseteq (-3, 3)$ (۲) $a \in (-3, 3)$ (۳) $a \in (-3, 3)$ (۴) $(1, a) \subseteq (-3, 3)$

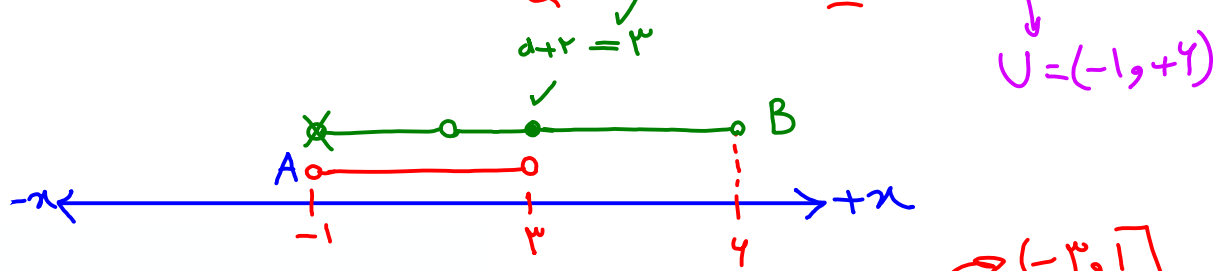
$a \neq 4, a = 2, a = 1$



«نردبام جامع»

سوال: اجتماع دو بازه $A = (-1, 3)$ و $B = [a+2, 6]$ یک بازه باز است. حدود a کدام است؟

- (۱) $-3 < a \leq 1$ (۲) $-3 \leq a \leq 1$ (۳) $-1 \leq a \leq 3$ (۴) $-1 < a < 1$



$a + 2 = 3 \rightarrow a = 1$
 $a + 2 > -1 \rightarrow a > -3$
 $a + 2 \leq 3 \rightarrow a \leq 1$

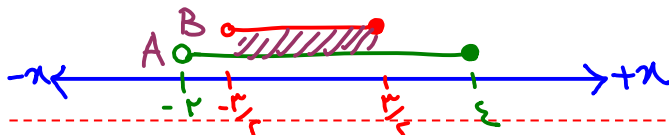
$\Rightarrow a \in (-3, 1]$

«میکرو-قرن»

سوال: اگر $A = \{x | x \in (-1, 2]\}$ و $B = \{x | 2x + 1 \in A\}$ باشد، آنگاه $A \cap B$ کدام است؟

$$A \cap B = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$$

$$B = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$$



$$\begin{aligned} -1 < 2x + 1 \leq 2 \\ -2 < 2x \leq 1 \\ -1 < x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

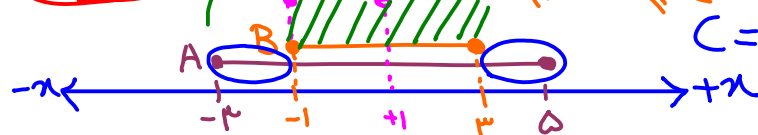
$$\begin{aligned} -1 < x \leq 2 \\ A = (-1, 2] \end{aligned}$$

سوال: اگر $A = [-3, 5]$ و $B = \{x | (2x - 1) \in A\}$ و $C = \{x | (4x + 1) \in A\}$ باشد، $A - (B \cup C)$ چند عضو صحیح دارد؟

«آی کیو جامع»

$$\text{حاصل} = [-3, -1) \cup (3, 5]$$

$$(-3, -1) \cup (3, 5]$$



$$C = [-1, 1]$$

$$B = [-1, 3]$$

«میکرو-قرن»

سوال: اگر $A = \{x - 1 | x \in P, 2 \leq \frac{x + 2x}{2} \leq 10\}$ و P مجموعه اعداد اول باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

$$\begin{aligned} 12 \in A \quad (2) \\ 18 \in A \quad (3) \end{aligned}$$

$$A = \{1, 2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots\}$$

مجموعه A ، 7 عضو دارد.

$$\begin{aligned} 2 \leq \frac{x + 2x}{2} \leq 10 \\ 2 \leq x \leq 18 \end{aligned}$$

$$x \in P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

«مهرماه»

سوال: اگر $(-3, 7] \cup (m, 15] = (-3, 15]$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

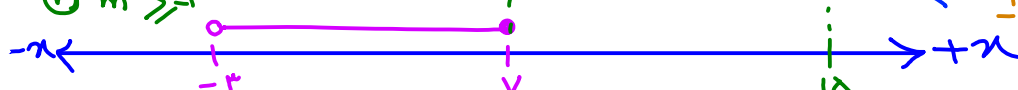
$$[-3, 7] \quad (4)$$

$$m = 7$$

$$m \leq 7$$

$$m = -3$$

$$m \geq 30$$



$$U$$

$$[-3, 7]$$

«میکرو-قرن»

سوال: اگر اجتماع دو بازه $(-\infty, k + 1]$ و $[3 - k, +\infty)$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود k کدام است؟

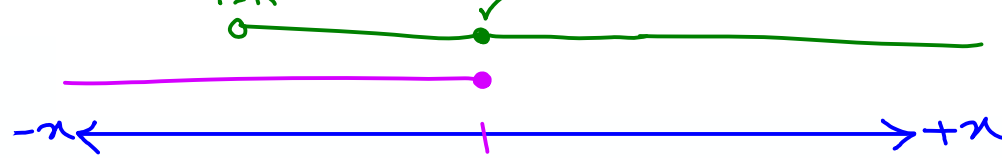
$$k \geq 1 \quad (4)$$

$$k \leq 1 \quad (3)$$

$$k \geq 2 \quad (2)$$

$$k \leq 2 \quad (1)$$

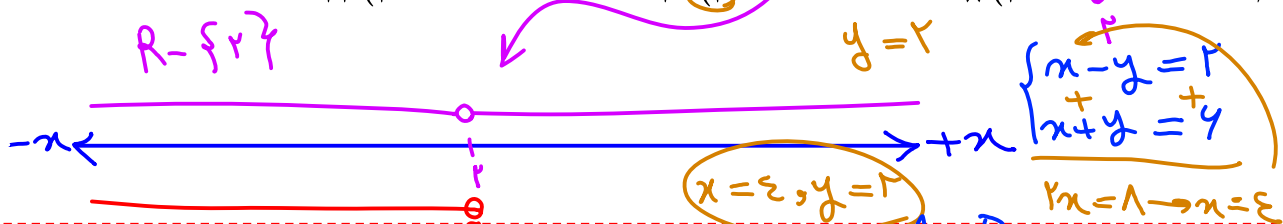
$$(-\infty, +\infty)$$



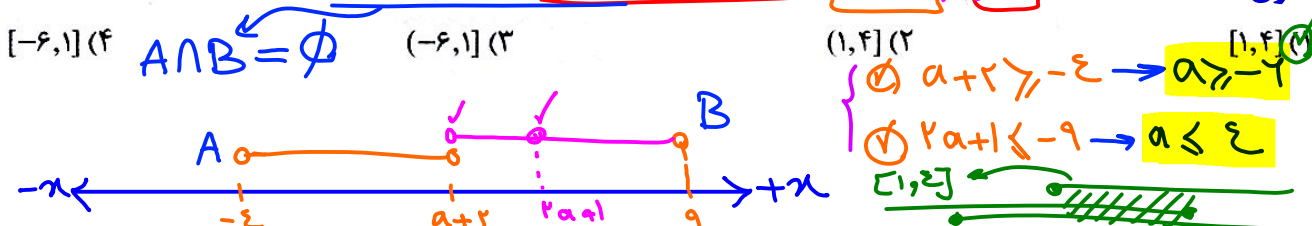
$$k+1 \leq 3-k$$

$$3-k \leq k+1 \rightarrow 2 \leq 2k \rightarrow k \geq 1$$

سوال: اگر $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, \frac{x+y}{2}) \cup (x-y, +\infty)$ باشد، آنگاه حاصل $2x+y$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲



سوال: اگر دو بازه $(-4, a+2)$ و $(2a+1, 9)$ هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟ «مهرماه»



مجموعه‌های منتهای و نامنتهای

مجموعه منتهای: مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن محدود و یک عدد حسابی باشد (هر چند هرچقدر این مجموعه بزرگ باشد، باز هم منتهای است $\Leftarrow$ یعنی انتها دارد)

مجموعه نامنتهای: مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگتر باشد (یعنی بینهایت باشد).
 نامعدود $\Leftarrow$

سوال: منتهای یا نامنتهای بودن هر کدام را مشخص کنید:

- تعداد اتم‌های هیدروژن در اتمسفر کره زمین: **منتهای**
 - تعداد درخت‌های جنگل آمازون: **نامنتهای**
 - تعداد خطوط گذرنده از مبدأ مختصات: **نامنتهای**
 - تعداد خطوط با شیب برابر با خط $y=x$: **نامنتهای**
 - تعداد دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات: **نامنتهای**
 - تعداد اعداد فرد: **نامنتهای**
 - تعداد اعداد گنگ: **نامنتهای**
 - تعداد فرد سه رقمی: **منتهای**
 - اعداد بین ۰ و ۱: **نامنتهای**
- همه بازه‌ها نامنتهای اند $\Leftarrow$ بی‌نهایت
- Handwritten notes: $\{a\} \leftarrow [a, a]$, $\emptyset \leftarrow (a, a)$

سوال: اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه:

- (۱) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه B قطعاً نامتناهی است!
 - (۲) اگر B نامتناهی باشد، آنگاه A قطعاً نامتناهی باشد!
 - (۳) اگر A متناهی باشد، آنگاه B قطعاً نامتناهی است!
 - (۴) اگر B متناهی باشد، آنگاه A قطعاً متناهی است.
- نکته: اگر یک مجموعه متناهی باشد، آن گاه قطعاً همه زیرمجموعه های آن متناهی خواهند بود!

سوال: آند مجموعه ای شامل ۱۰ عضو باشد، چند زیرمجموعه متناهی دارد؟

کلی همه زیرمجموعه ها متناهی خواهند بود.

$$2^n = 2^{10}$$

نکته: اشتراک هر مجموعه با یک مجموعه متناهی، قطعاً متناهی است و اجتماع هر مجموعه با یک مجموعه نامتناهی، قطعاً نامتناهی است. جدول زیر را تکمیل کنید:

مجموعه	A و B متناهی	A و B نامتناهی	A نامتناهی و B متناهی	A نامتناهی و B نامتناهی
$A \cup B$	متناهی	نامتناهی	نامتناهی	نامتناهی
$A \cap B$	متناهی	متناهی یا نامتناهی	متناهی	متناهی
$A - B$	متناهی	متناهی یا نامتناهی	متناهی	نامتناهی

نکته: مجموعه تهی ($\emptyset$) یک مجموعه متناهی است. زیرا هیچ عضوی ندارد!

نکته: همه بازه ها نامتناهی اند مگر بازه $[A, A]$ که همان $\{A\}$ و بازه (a, a) که همان $\emptyset$ است.

نکته: اگر اشتراک دو بازه متناهی باشد، دو حالت ممکن است:

۱- یا اشتراک ندارند $A \cap B = \emptyset$

۲- یا اشتراک تک عضوی دارند $\Rightarrow$ یعنی نقطه انتهایی یک بازه بر نقطه ابتدای بازه دیگر منطبق است.

سوال: اگر اشتراک دو بازه $A = [2M+3, +\infty)$ و $B = (-\infty, 3M-6]$ یک مجموعه متناهی باشد، اختلاف

بزرگ ترین و کوچک ترین عدد حسابی قابل قبول برای M چند واحد است؟

تالیفی

۳ (۴)

۵ (۳)

$$M \leq 7$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$3M-6 < 2M+3$$

$$A \cap B = \{k\}$$

$$A \cap B = \{k\}$$

$$A \cap B = \{k\}$$

نکته: تعداد اعداد طبیعی n رقمی با فرمول $9 \times 10^{n-1}$ محاسبه می‌شود.

نکته: مجموعه‌ای که متناهی باشد، همه زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی هستند.

$9 \times 10^0 = 9 \times 1 = 9$

سوال: مجموعه اعداد طبیعی دورقمی، چند زیرمجموعه متناهی دارد؟

(۱) $2^{90} - 1$ (۲) 2^{90} (۳) 2^{900} (۴) $2^{900} - 1$

$99, 10, 11, \dots$
 $9 = 99 - 10 + 1 = 90$

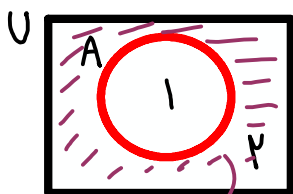
همه زیرمجموعه‌ها

مجموعه متناهی است

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع: مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن هستند. مجموعه مرجع یا جهانی را با U نمایش می‌دهیم.

متمم مجموعه: می‌دانیم که هر مجموعه دلخواه (مثل مجموعه A)، زیرمجموعه U است ($A \subseteq U$). تمامی عضوهای از مجموعه مرجع که جزء A نباشند، متمم مجموعه A را می‌سازند (با نماد A').



$$A' = U - A \quad \left\{ \quad A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\} \right.$$

سوال: در جدول زیر، در هر کدام از مثال‌های زیر، متمم مجموعه A را بنویسید:

$U - A = A'$

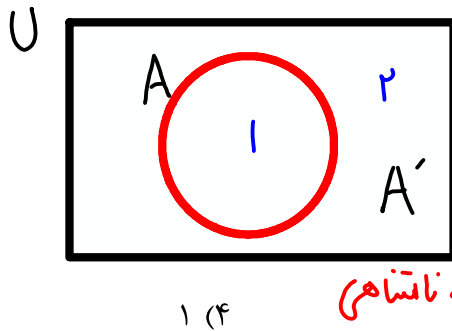
مجموعه مرجع (U)	مجموعه دلخواه A	نمایش بازه‌ای متمم مجموعه A (یعنی A')	نمایش هندسی متمم مجموعه A (یعنی A')
$\mathbb{R}$	$(2, 6]$	$A' = \mathbb{R} - (2, 6] = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty)$	
$\mathbb{Z}$	$\{0, 2, 4, \dots\}$	$U - A = A'$ $\mathbb{Z} - \{0, 2, 4, \dots\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$	
$\mathbb{W}$	$\mathbb{N}$	$U - A = A'$ $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$	

U $[2, 5]$	A $\{2, 3, 4\}$	$[2, 5] - \{2, 3, 4\}$ $A' = (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 5]$	
N $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$	$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$	$U - A = A'$ $A' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$	
$(2, 6]$ U	$A = (2, 6)$	$U - A = A'$ $A' = (2, 6] - (2, 6) = \{6\}$	

«تالیفی»

سوال: چند مورد عبارت زیر را به درستی تکمیل می کند؟

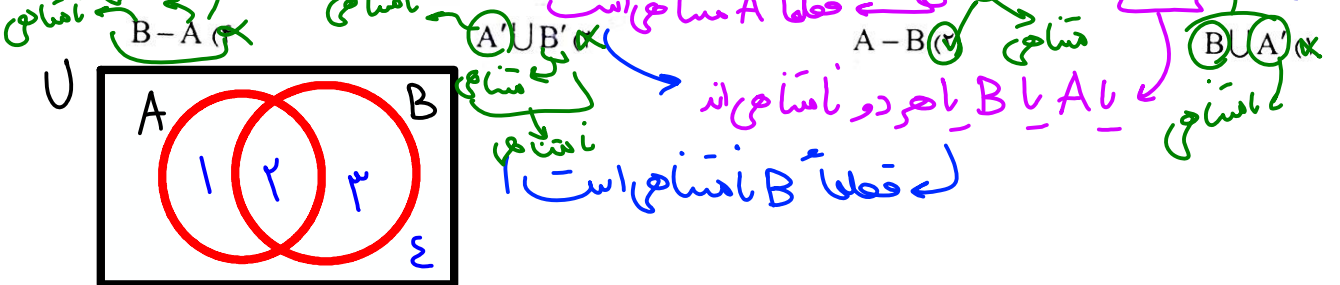
«اگر مجموعه مرجع (U) باشد و مجموعه دلخواه A باشد، آن گاه مجموعه A' قطعاً است.»



الف) متناهی - متناهی - متناهی
 ب) نامتناهی - نامتناهی - نامتناهی
 ج) نامتناهی - نامتناهی - نامتناهی
 د) نامتناهی - نامتناهی - نامتناهی

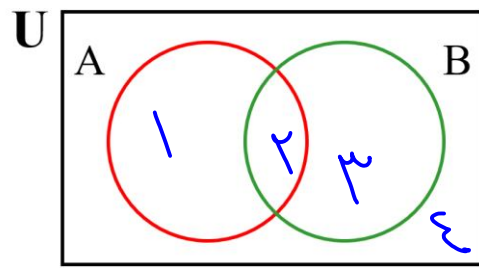
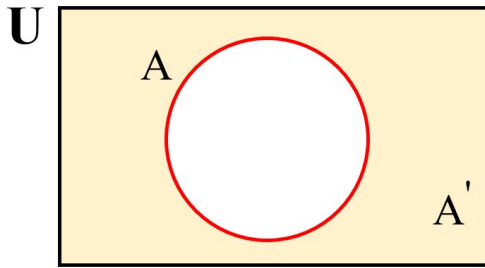
متناهی یا نامتناهی

سوال: اگر A و B نامتناهی و A ∪ B نامتناهی باشد، کدام مجموعه متناهی است؟



خواص متمم

برای سادگی کار می توانیم مثلاً به A' بگوییم «عدم A»؛ یعنی A نباشد. بهترین و ساده ترین راه برای درک مفاهیم و پاسخ به سوالات مربوطه، استفاده از نمودار ون است.



سوال: در برابر هر کدام از عبارات زیر، پاسخ مناسب بنویسید:

? $(A')' = A$

? $A \cap A' = \emptyset$ → **بله: صحیح است**

? $A' \cup A = U$

? $A - A' = A - A \cap A' = A$

? $A' - U = A - U = \emptyset$

? $A' - A = A' - A \cap A = A'$

? $A \cap B' = A - B = \{1\}$

? $A' \cap B = A' \cap B = \{3\}$

? $(A \cup B)' = A' \cap B'$

? $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **دمورگان:**

? $A' \cup B = (A \cap B')'$

? $A' \cap B' = (A \cup B)'$

? $A \cap (A' \cup B) = A \cap B = \{2\}$

? $A \cup (A' \cap B) = A \cup B = \{1, 2, 3\}$ **تبدیل جزء:**



تذکر: برای درک قوانین دمورگان به این مورد توجه کنید که $\Leftarrow$ وقتی متمم بر پراستری اثر می‌کند، هر دو مجموعه درون پراستری را متمم کرده و علامت وسط را هم عوض می‌کند.

سوال: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$ ، $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ باشند، حاصل هر کدام از موارد زیر را بیابید:

? $A' \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

? $A' \cap B' = (A \cup B)' = \{12\}$

? $(A \cup B)' = A' \cap B'$

? $U - (A \cap B) = A \cap B = \{2, 4\}$

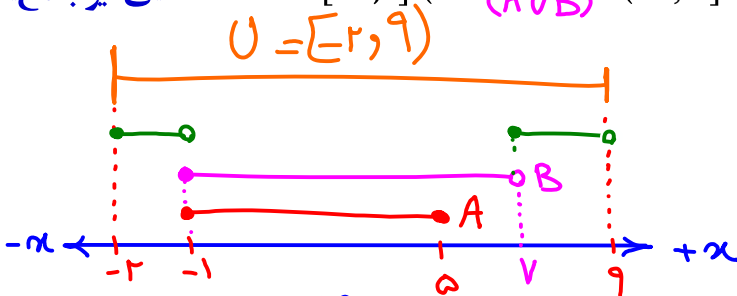
$K \rightarrow U - K' = K$

نکته: برای افزایش سرعت بدانید که اگر بخواهیم اشتراک را به تفاضل (و برعکس) تبدیل کنیم، کافیست متمم مجموعه دوم را بنویسیم:

$A \cap B' = A - B$
 $A' \cap B' = A' - B$
 $A - B' = A \cap B$
 $A' - B' = A' \cap B$

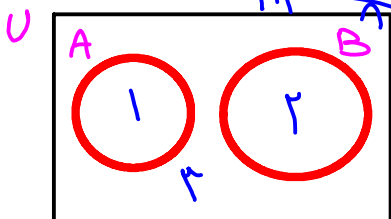
تبدیل اشتراک به تفاضل و برعکس «بحث مصوبه متمم»
 - ضمن تغییر علامت $(- \rightarrow \cap)$ ، مصوبه دوم را متمم کنیم!
 $A \cap B = A \cap B$
 $A' \cap B = A' \cap B$
 $A \cap B' = A - B$
 $A' \cap B' = A' - B$
 $A - B' = A \cap B$
 $A' - B' = A' \cap B$
 $A \cap B' = A - B$
 $A' \cap B' = A' - B$
 $A - B' = A \cap B$
 $A' - B' = A' \cap B$

سوال: اگر $A = [-1, 5]$ ، $B = [-1, 7]$ و $A' \cap B' = [-2, -1) \cup [7, 9)$ باشد، مجموعه مرجع کدام است؟
 (۱) $(-2, 9)$ (۲) $[-2, 9]$ (۳) $(-2, 9]$ (۴) $[-2, 9)$ «آی کیو جامع»



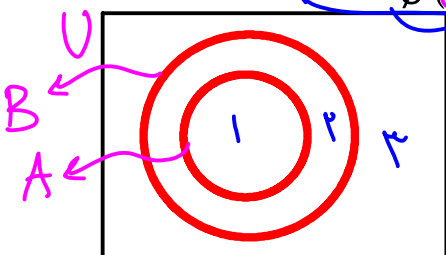
$A \cup B = [-1, 7]$

سوال: برای دو مجموعه A و B، اگر $B - A = B$ باشد، متمم مجموعه $(B' \cap A) \cap (A' \cup B)$ کدام است؟
 (۱) A (۲) A' (۳) $A \cap B = \emptyset$ «میکرو-قرن»



$(\emptyset)' = U$

سوال: اگر $A - B = \emptyset$ و $B - A \neq \emptyset$ ، متمم مجموعه $(B' \cap A') \cup (B \cap A) \cup A$ کدام است؟
 (۱) A (۲) A' (۳) U «تالیفی»



$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3\} = U$

$U' = \emptyset$

سوال: اگر مجموعه اعداد صحیح را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، حاصل $(Z - W) \cap N'$ کدام است؟ (آی کیو)

Z (۱)

N (۲)

$\emptyset$ (۳)

$\{0\}$ (۴)

$$U = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$W = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$N = \{0\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

نکته: اگر مجموعه A زیر مجموعه متمم مجموعه B باشد $(A \subseteq B')$ یا اگر مجموعه B زیر مجموعه متمم مجموعه A باشد $(B \subseteq A')$ ، دو مجموعه A و B جدا از هم هستند.

$$A \subseteq B' \Leftrightarrow B \subseteq A'$$

آیا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ ؟

نزدیک جامع

سوال: اگر $A \subseteq B'$ باشد، حاصل $A \cup (A - B)$ کدام است؟

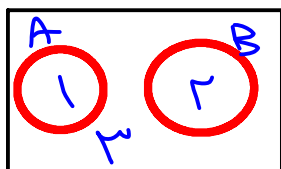
U (۳)

A (۴)

$A \cup B$ (۲)

$A \cap B = \emptyset$

B' (۱)



$$A \cup A' = U$$

نزدیک جامع

سوال: اگر B و C دو مجموعه جدا از هم و $A \cap (C - B) \subseteq A \cap B$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

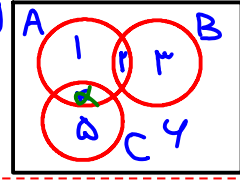
$$C - (A \cup B) = C \cap A'$$

$$C - (A \cap B) = C \cap A'$$

$$B - A \cap B = B - A$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$C - B = C - A$$



$$A \cap C \subseteq A \cap B$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$\emptyset \subseteq \{1, 2\} \rightarrow A \cap C = \emptyset$$

میگو

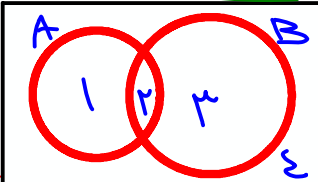
سوال: متمم مجموعه $(A \cup B)' \cup A'$ کدام است؟

$$B' \cap (A - B)$$

$$(A - B) \cup (B - A)$$

$$(A - B) \cup (A \cap B)$$

$$(A \cap B) \cup (B - A)$$



$$\{3, 4\} = A'$$

$$(A')' = A$$

$$A' \cap B$$

$$\{3, 4\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}$$

سوال: اگر $U = \{1, 2, \dots, 20\}$ مجموعه مرجع، A زیرمجموعه ای دلخواه و $B \subseteq U$ شامل تمام اعداد اول باشد، در این صورت عبارت

(آی کیو)

چند عضو دارد؟ $(B - A)' \cap (A' \cup B')$

A (۴)

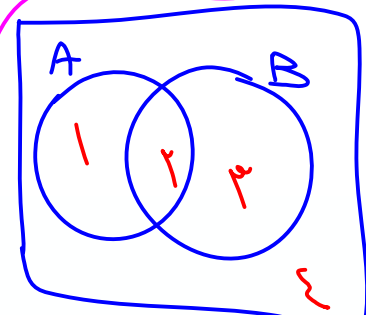
12 (۳)

13 (۲)

$$B \subseteq U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B' = \{1, 4\}$$

$$U - B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} = 20 - 8 = 12 \text{ عضو}$$



سوال: برای دو مجموعه A و B اگر $B \cup (A - B) = B$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟

$(A \cap B) \cup B = B$ (✓)
 $A' - B = A$ (✗)
 $A \cap B' = \emptyset$ (✓)
 $B' \subseteq A'$ (✓)
 $A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$
 $A' \cap B' = (A \cup B)' = B'$

سوال: اگر $A \cap B' = A$ باشد، مجموعه $(A' \cup B) \cap (B' \cup A')$ کدام است؟

$A \cap B' = A$ (✓)
 $A \cap B = A$
 $A \subseteq B$
 $U \cap A' = A' = (A')' = A$
 $(A' \cup B) \cap (B' \cup A') = A$

سوال: اگر از مجموعه A هر عضوی را برداشته و به عضوهای مجموعه B اضافه کنیم، تعداد عضوهای مجموعه B تغییری نمی‌کند. کدام نتیجه نمی‌تواند در مورد این دو مجموعه صحیح باشد؟

$(A' \cup B)' = U$ (✓)
 $A \subseteq B$
 $B' \subseteq A'$ (✓)
 $n(B - A) \neq 0$ (✗)
 $n(A - B) = 0$ (✓)
 $A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$

سوال: برای دو مجموعه A و B، اگر $A \cup B = A \cap B$ باشد، حاصل $(A - B)' - B$ کدام است؟ (U مجموعه مرجع است.)

$U - B = B' = A'$
 $A \cup B = A \cap B$
 $A = B$

نکته: اگر در صورت سوال B و A این دو مورد ذکر شوند قطعاً $A = B$

سوال: اگر A، B و C سه مجموعه غیرتهی باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، آنگاه مجموعه $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟

$A - C$
 $A \cap C' \subseteq (A \cup C)$
 $A - B = B - A$
 $A \cap C$

حال عبارت

این عبارت:

تعداد اعضای مجموعه‌ها

تعداد اعضای مجموعه‌های A و B را به ترتیب با نماد $n(A)$ و $n(B)$... نشان می‌دهیم.

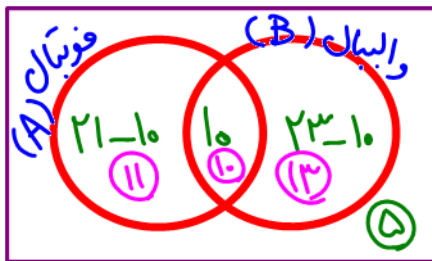
سوال: برای عبارات زیر پاسخ مناسب بنویسید:

? $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$? $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

? $n(A - B) \cup n(B - A) \cup n(A \cap B) = n(A \cup B)$? $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

? $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

سوال: در یک کلاس ۲۱ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۳ نفر عضو تیم والیبال و ۱۰ نفر هم عضو هر دو تیم هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان عضو هیچ تیمی نباشند؛ به این موارد پاسخ دهید: «تالیفی»



? تعداد کل افراد این کلاس چند نفر است؟

$$11 + 10 + 13 + 5 = 39$$

? چند نفر عضو تیم فوتبال نیستند؟

$$A' = U - A = 39 - 21 = 18 \leftarrow 13 + 5$$

? چند نفر از ورزشکاران عضو تیم فوتبال نیستند؟

$$n(A \cup B) - n(A) = n(B - A) = 13$$

? چند نفر در فوتبال با والیبال شرکت دارند؟

$$n(A \cup B) = 11 + 10 + 13 = 34$$

? چند نفر در فوتبال و والیبال شرکت دارند؟

$$n(A \cap B) = 10$$

? چند نفر فقط در یک رشته ورزشی عضویت دارند؟

$$n(A - B) \cup n(B - A) = 11 + 13 = 24$$

? چند نفر حداقل در یکی از رشته‌ها عضویت دارند؟

$$n(A \cup B) = 34$$

? چند نفر حداکثر در یکی از رشته‌ها عضویت دارند؟

$$n(A - B) \cup n(B - A) \cup n(A \cap B) = 11 + 13 + 10 = 34$$

? چند نفر فقط والیبال بازی می‌کنند؟

$$n(B - A) = 13$$

چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

$$n(A-B) = 11$$

سوال: اگر $n(A \cup B) = 32$ و $n(A \cap B) = 2$ و $n(A) = 3$ و $n(B) = 6$ باشد، آنگاه تعداد اعضای که فقط به یک مجموعه تعلق دارد چند برابر تعداد افرادی است که به هر دو مجموعه تعلق دارند؟

۵ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$$n(A \cup B) = 32 \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 32$$

$$n(A \cap B) = x$$

$$3x + 2x - x = 32 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = 8$$

$$n(A \cap B) = 8, n(A) = 3 \times 8 = 24, n(B) = 2 \times 8 = 16$$

$$\text{فرمول سوال} = \frac{n(A-B) \cup n(B-A)}{n(A \cap B)} = \frac{n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = \frac{24 - 8 + 16 - 8}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

سوال: ۸۰ ایرانی در یک همایش ۲۰۰ نفری حضور دارند. اگر ۵۰ نفر از شرکت کنندگان بازیگر و ۱۰۰ نفر نه بازیگر و نه ایرانی باشند، آنگاه چند نفر از شرکت کنندگان فقط ایرانی یا فقط بازیگر هستند؟

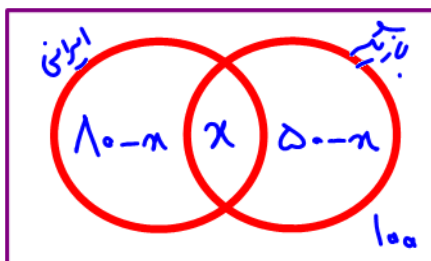
آزمون های تاج

۶۰ (۴)

۹۰ (۳)

۸۰ (۲)

۷۰ (۱)



$$200 = 100 - x + x + 50 - x + 100$$

$$100 = 150 - x \Rightarrow x = 50$$

$$\text{جواب صحیح} \rightarrow 100 - x + 50 - x = 70$$

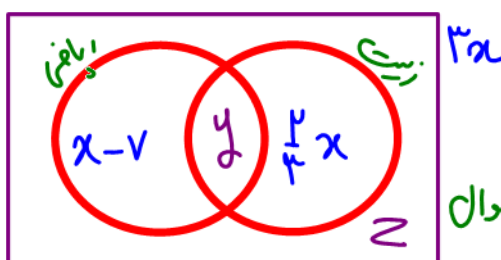
سوال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۷ - x نفر فقط در درس ریاضی و $\frac{2}{3}x$ نفر فقط در درس زیست شناسی نمره بالای ۱۶ گرفته اند. اگر تعداد کسانی که با در هر دو درس نمره بالای ۱۶ گرفته اند یا در هیچ کدام نمره بالای ۱۶ نگرفته اند، ۱۹ باشد، تعداد کل افراد کلاس کدام است؟

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۳۰ (۲)

۲۷ (۱)



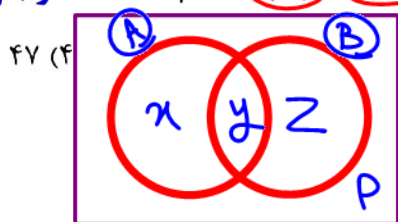
$$30 = x - 7 + y + \frac{2}{3}x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}x + y = 25$$

$$19 = z + y$$

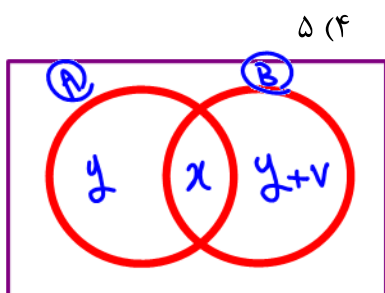
$$x = 9$$

سوال: اگر $n(A \cup B) = 41$ و $n(A - B) + n(B - A) = 27$ باشد، مقدار $n(A) + n(B)$ کدما است؟



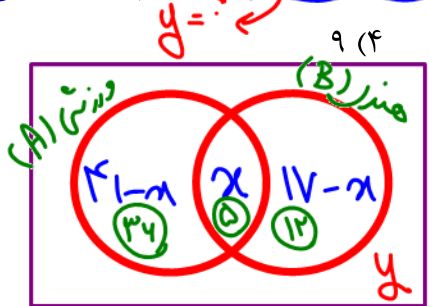
$\Rightarrow x + z = 17$
 $\Rightarrow n(A \cup B) = 51 \rightarrow x + z + y = 51$
 $y = 51 - 17 = 34$
 فإجابة السؤال = $x + y + z + y = 17 + 34 + 17 + 34 = 102$

سوال: تعداد اعضای مجموعه B ، ۷ واحد بیشتر از تعداد اعضای مجموعه A است. اگر تعداد اعضای که فقط به یکی از دو مجموعه تعلق دارد از دو برابر تعداد اعضای مجموعه A ، یک واحد بیشتر باشد، چند عضو در دو مجموعه A و B مشترک است؟



$$\begin{aligned} y + y + v &= r(x + y) + 1 \\ \Rightarrow \cancel{y} + v &= rx + \cancel{y} + 1 \rightarrow rx = v \rightarrow x = r \end{aligned}$$

سوال: در یک گروه ۶۰ نفره، ۴۱ نفر به رشته‌های ورزشی و ۱۷ نفر به رشته‌های هنری علاقه‌مند هستند. اگر تعداد افرادی که فقط به رشته‌های ورزشی علاقه‌مند هستند، $n(A-B) = 21 - x$ سه برابر تعداد افرادی باشد که فقط به رشته‌های هنری علاقه‌مند هستند، $n(B-A) = 17 - x$ کدام است؟ **تاج**



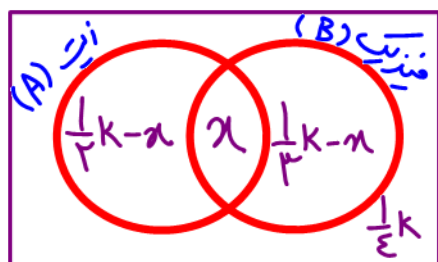
$\lambda(\pi)$
 $\gamma(\pi)$
 $\epsilon(\pi)$

$\epsilon(1-\pi) = \pi(V-\pi)$

$\Rightarrow \epsilon(1-\pi) = \Delta(1-\pi) \rightarrow \pi = \Delta$

$+ \Delta + \pi + y \rightarrow y = V$

سوال: در یک نظرسنجی از تعدادی دانش آموز، مشخص شد که بیمی از دانش آموزان از کلاس زیست‌شناسی و یک‌سوم آن‌ها از کلاس فیزیک آقای جشانی‌پور استفاده می‌کنند. اگر یک‌چهارم دانش‌آموزان از هیچ‌کدام از این دو کلاس استفاده نکنند، تقریباً چند درصد دانش‌آموزان فقط از یکی از این دو کلاس استفاده می‌کنند؟



$$K \Rightarrow K = \frac{1}{r}K - \alpha + \alpha + \frac{1}{p}K - \alpha + \frac{1}{q}K$$

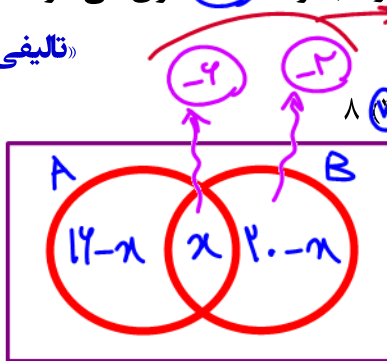
$$K = \frac{q}{p}K + \frac{s}{p}K + \frac{r}{p}K - \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p}K = \frac{r}{p}K - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{p}K$$

$$\frac{\Delta K}{p} = 144$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r}K - \frac{K}{p} \right) + \left(\frac{1}{p}K - \frac{K}{p} \right) = \frac{\Delta K}{p} + \frac{wK}{p}$$

سوال: مجموعه A و B به ترتیب دارای ۱۶ و ۲۰ عضو هستند. اگر ۸ عضو از مجموعه B به گونه‌ای برداریم که تعداد عضوهای مشترک بین دو مجموعه ۶ عدد کاهش یابد، اجتماع این دو مجموعه ۲۰ عضوی می‌شود. در حالت اول $n(A \cap B)$ کدام است؟



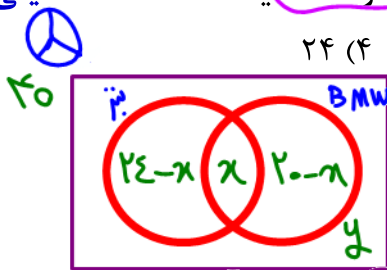
۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳)

$$n(A \cup B) = 20 \rightarrow 14 - x + x + 20 - x = 20$$

$$-x + 34 = 20 \rightarrow x = 14$$

$$n(A \cap B) = 14$$

سوال: در یک همایش ۴۰ نفری، ۲۴ نفر خودروهای شرکت Benz و ۲۰ نفر خودروهای شرکت BMW را دوست دارند. حداکثر چند نفر از افراد حاضر در این همایش، طرفدار این شرکت‌ها نیستند؟



۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

$$24 - x + x + 20 - x + y = 40$$

$$44 - x + y = 40 \rightarrow y = x - 4$$

$$24 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 24$$

$$20 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 20$$

$$y \geq 0 \rightarrow x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

$$4 \leq x \leq 20$$

سوال: در یک کلاس ۲۰ نفری، ۱۰ نفر ماست و ۱۲ نفر دوغ دوست دارند. حداکثر چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس هم ماست و هم دوغ را دوست ندارند؟



۲ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

$$20 = 10 - x + x + 12 - x + y$$

$$20 = 22 - x + y \Rightarrow y = x - 2$$

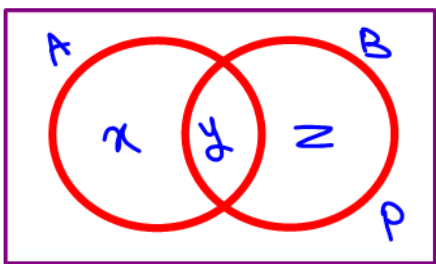
$$10 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 10$$

$$12 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 12$$

$$y \geq 0 \rightarrow x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$2 \leq x \leq 10$$

سوال: هرگاه A مجموعه ۶ عضوی و $(A \cup B) - (A \cap B)$ مجموعه‌ای ۹ عضوی باشد، حداکثر و حداقل اعضای B کدام است؟



۶ و ۹ (۱) ۶ و ۱۵ (۲) ۳ و ۱۵ (۳)

$$x + y = 6 \rightarrow x + y = 6$$

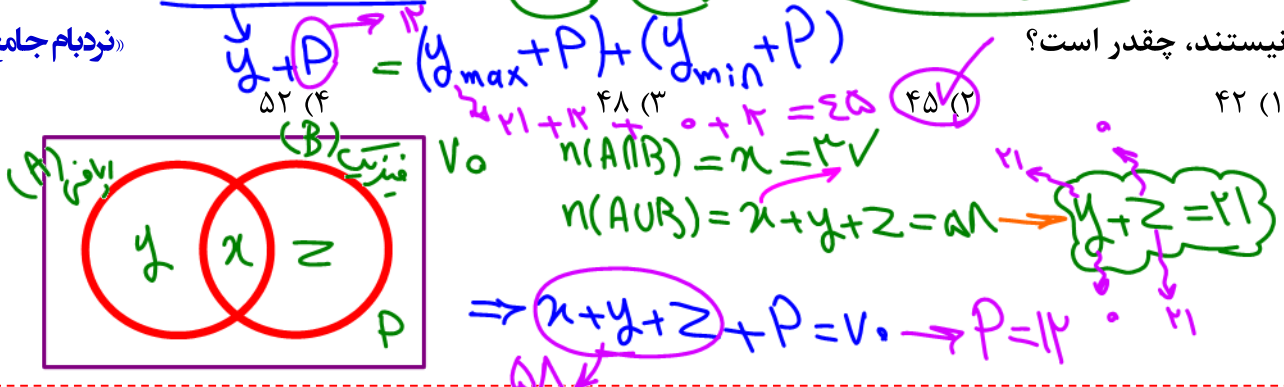
$$(x + y + z) - y = 9 \rightarrow x + z = 9$$

$$2x + y + z = 15 \Rightarrow y + z = 15 - 2x$$

$$x + y = 6 \rightarrow 0 \leq x \leq 6$$

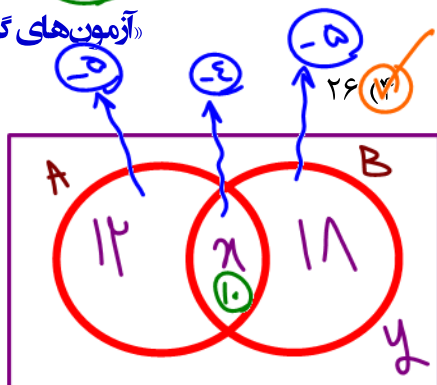
$$-12 \leq -2x \leq 0 \rightarrow 3 \leq 15 - 2x \leq 15$$

سوال: در یک مدرسه از ۷۰ دانش آموز پایه دهم، ۳۷ نفر هم به ریاضی علاقه مندند و هم به فیزیک و ۵۸ نفر یا به ریاضی علاقه مندند یا به فیزیک. مجموع حداقل و حداکثر تعداد دانش آموزانی که به فیزیک علاقه مند نیستند، چقدر است؟



نکته: اگر تعدادی عضو به مجموعه A اضافه شود، عضوهایی که به قسمت اشتراک با مجموعه B اضافه می‌شوند، واقع به خود مجموعه B هم اضافه می‌شوند. پس اگر بخواهیم فقط به مجموعه A اضافه کنیم (و به B اضافه نکنیم)، باید به قسمت (A-B) اعضا را بیافزاییم (در مورد برداشتن عضو هم همینطور است).

سوال: اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از این مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟



$$n(A \cup B) = 40 \Rightarrow 12 + 18 + x = 40 \Rightarrow x = 10$$

$$n(A \cup B_r) = (12 - 9) + (18 - 9) + (10 - 4) = 7 + 9 + 6 = 22$$

سوال: اگر مجموعه مرجع، اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ باشد، چند عدد وجود دارد که نه بر ۳ و نه بر ۴ بخش پذیر است؟

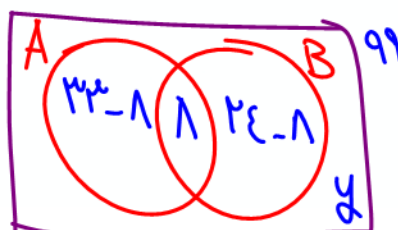
میکروگاج

$$U = \{1, 2, \dots, 99\} \rightarrow n(U) = 99$$

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 99\} \rightarrow n(A) = \frac{99-3}{3} + 1 = 33$$

$$B = \{4, 8, 12, \dots, 96\} \rightarrow n(B) = \frac{96-4}{4} + 1 = 24$$

$$n(A \cap B) = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\} \rightarrow n(A \cap B) = 8$$

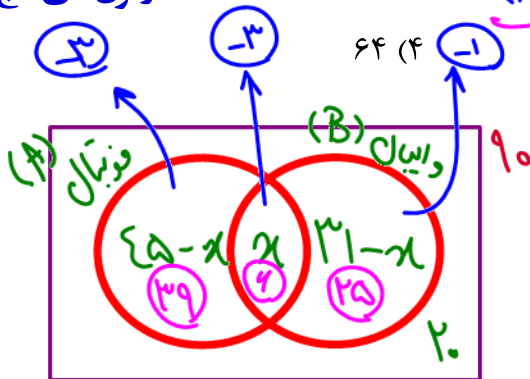


$$\Rightarrow 99 = 33 + 24 - 8 + y \Rightarrow y = 50$$

سوال: در یک مدرسه ۹۰ نفری، ۴۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۳۱ نفر عضو تیم والیبال و ۲۰ نفر عضو هیچ تیمی نیستند. اگر ۶ نفر از تیم فوتبال و ۴ نفر از تیم والیبال را حذف کنیم، از تعداد افرادی که در هر دو رشته فعالیت می کنند، ۳ نفر کم می شود. تعداد اعضای که فقط در یکی از این رشته ها فعالیت می کنند، پس از اعمال این تغییرات کدام است؟

$n(A-B) \cup n(B-A)$

آزمون هلی گاج



$$n(A-B) \cup n(B-A)$$

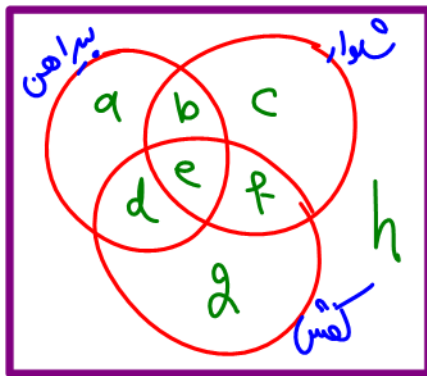
اعمال این تغییرات کدام است؟

$$\sum a + 1 - n + 1 = 9 \rightarrow n = 4$$

$$(\mu_9 - \mu) + (\sigma^2 - 1)$$

$$\mu_y + \nu_x = y.$$

سوال: در یک فروشگاه با سه محصول پیراهن، شلوار و کفش تعداد کسانی که فقط یک کالا خرید کرده‌اند ۴ برابر تعداد افرادی است که فقط دو کالا خرید کرده‌اند و البته $2x + x = 3x = 3 \times 12 = 36$ برابر تعداد کسانی است که هر سه محصول را خریداری کرده‌اند. اگر ۱۶ نفر هیچ خریدی نداشته باشند تعداد کل افراد ۱۰۰ نفر باشد چند نفر اقل دو کالا خریداری کرده‌اند؟



$\epsilon \lambda \quad \lambda \quad \epsilon = \lambda \lambda$
 $a + c + g = \epsilon(b + d + f) = \gamma(e)$
 $\lambda \epsilon \text{ too} = (a + c + g) + (b + d + f) + (e) + h$
 $\epsilon \lambda + \lambda + \gamma \lambda = \lambda \epsilon$
 $\forall \lambda = \lambda \epsilon \rightarrow \lambda = 12$

هرچه میخواهد دل تنگت بنویس:

مفهوم: زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی.

بازه	$[a, b]$	(a, b)	$[a, b)$	$(a, b]$
نمایش روی محور				

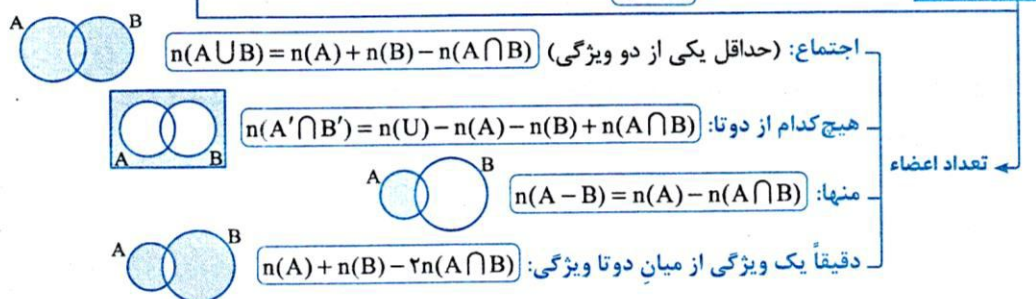
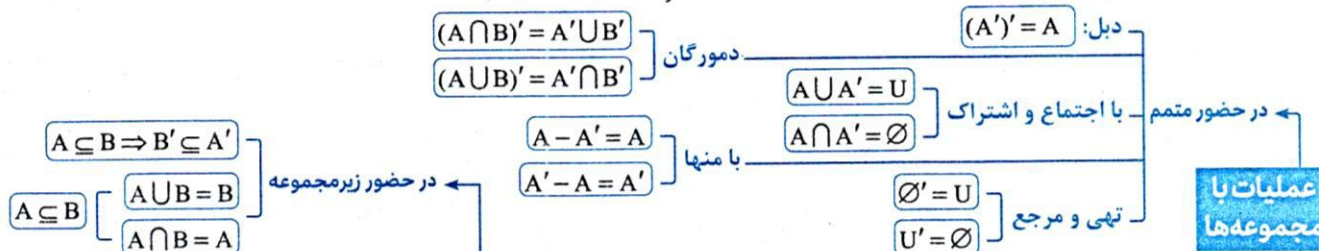
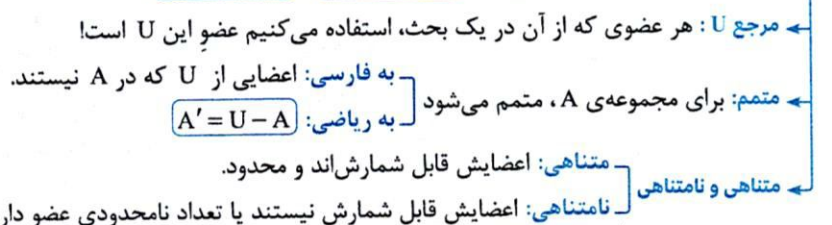
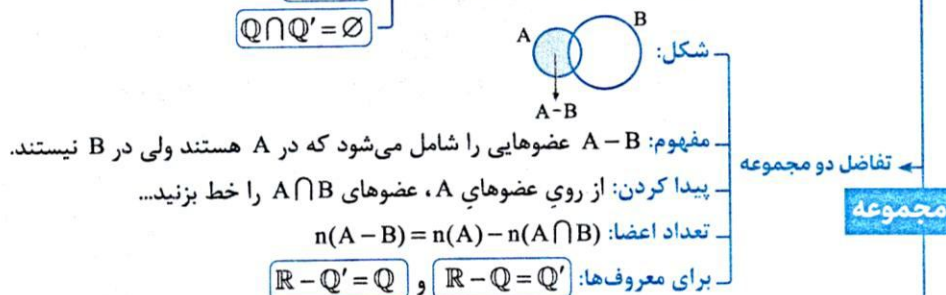
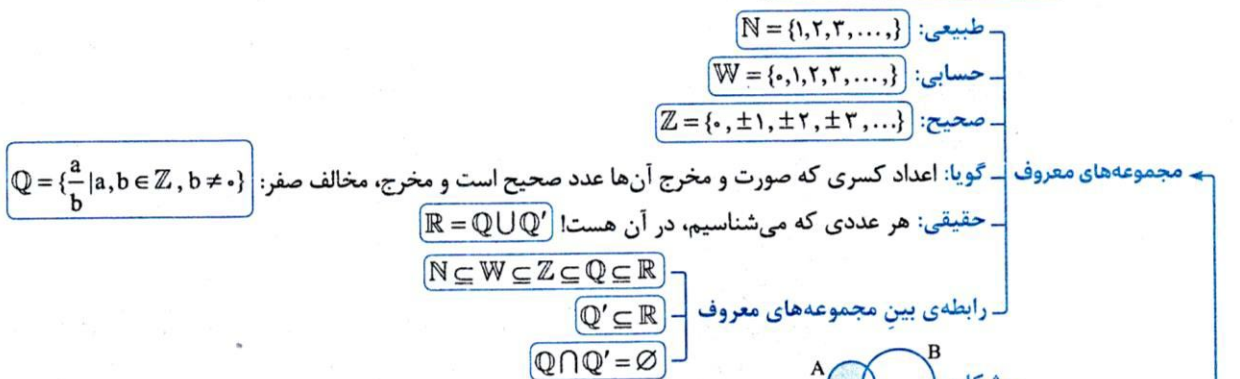
اگر شامل ∞ نباشد:

بازه	$[a, +\infty)$	$(a, +\infty)$	$(-\infty, b)$	$(-\infty, b]$
نمایش روی محور				

اگر شامل ∞ باشد:

بازه‌های جدا از هم: این‌ها را به شکل اجتماع چند بازه بنویس.

بازه‌ی معروف: $\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$



درسنامه ۲: الگو و دنباله (حسابی و هندسی)

الگو

تعریف الگو و جمله عمومی: تعدادی شکل یا عدد که با قانون مشخصی پشت سر هم قرار می‌گیرند را الگو می‌نامیم و به این قانون هم جمله عمومی می‌گوییم.

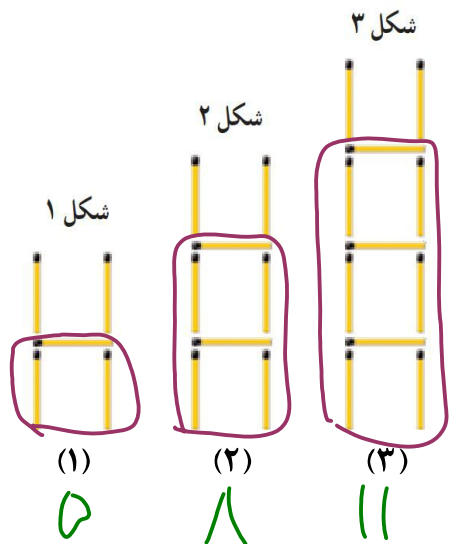
همان جمله عمومی ← عبارتی به حسب n

روش حل: برای حل سوالات الگو باید اول جمله عمومی را پیدا کنیم و سپس هر جمله‌ای را که از ما می‌خواهند با کمک جمله عمومی به دست بیاوریم.

تذکره: برای به دست آوردن جمله عمومی از جدول زیر استفاده می‌کنیم. کافی است در مقابل شماره هر مرحله (یا جمله)، حاصل آن را نوشته و به نظم آن‌ها پی ببریم.

شماره مرحله (شماره جمله)	۱	۲	۳	...	n
حاصل					$a_n = \dots$

سوال: با توجه به شکل مقابل، به سوالات زیر پاسخ دهید:



شماره جمله	۱	۲	۳	...	n
حاصل	$(1) \times 3 + 2$	$(2) \times 3 + 2$	$(3) \times 3 + 2$		

$$a_n = 3n + 2$$

الف) جمله عمومی را پیدا کنید:

$$a_{15} = 3(15) + 2 = 47$$

ب) تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله پانزدهم چند عدد است؟

$$11 \times 3 + 2 = 35$$

پ) تعداد چوب کبریت‌ها در کدام مرحله برابر ۹۲ است؟

$$a_n = 92 \rightarrow n = ?$$

$$3n + 2 = 92 \rightarrow 3n = 90 \rightarrow n = 30$$

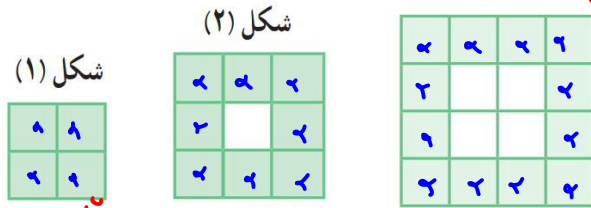
ت) حاصل جمع تعداد چوب کبریت‌ها در دو جمله متوالی برابر ۱۲۱ است. جمله کوچک‌تر، جمله چندم است؟

$$a_n = 3n + 2$$

$$a_{n+1} = 3(n+1) + 2$$

$$\Rightarrow a_n + a_{n+1} = 121 \Rightarrow 3n + 2 + 3(n+1) + 2 = 121 \Rightarrow 6n + 7 = 121 \Rightarrow 6n = 114 \Rightarrow n = 19$$

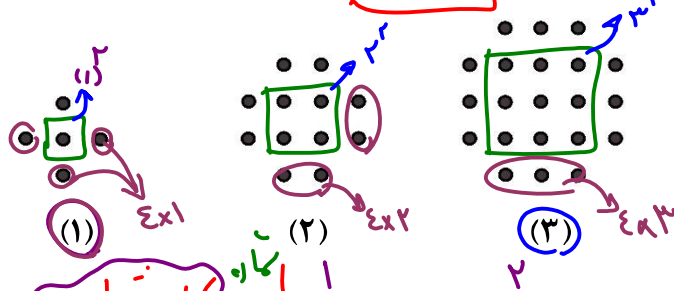
سوال: با توجه به الگوی زیر، در مرحله‌ای که تعداد مربع‌های سفید ۳۶ عدد است، تعداد مربع‌های رنگی چند عدد است؟ «تالیفی»



$b_n = 4 \times n = 28$
 28 (۲)
 20 (۴)
 24 (۱)
 32 (۳)

سفید: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$
 $(1-1)^2 \quad (2-1)^2 \quad (3-1)^2 \quad (n-1)^2 \rightarrow a_n = (n-1)^2 = 36 \rightarrow (n-1) = \pm 6$
 $n-1 = 6 \rightarrow n = 7, n-1 = -6 \rightarrow n = -5$
 $n \in \mathbb{N} \rightarrow n = 7$
 رنگی: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$
 $(1) \times 4 \quad (2) \times 4 \quad (3) \times 4 \quad n \times 4 \rightarrow b_n = 4n$

سوال: در مرحله‌ای که تعداد نقاط سیاه برابر با ۹۶ است، نقطه‌ها در چند ردیف مرتب شده‌اند؟ «تالیفی»



$n^2 + 4n = 96$
 $n^2 + 4n - 96 = 0$
 $(n+12)(n-8) = 0$
 $n+12 = 0 \rightarrow n = -12$
 $n-8 = 0 \rightarrow n = 8$
 $n = 8$

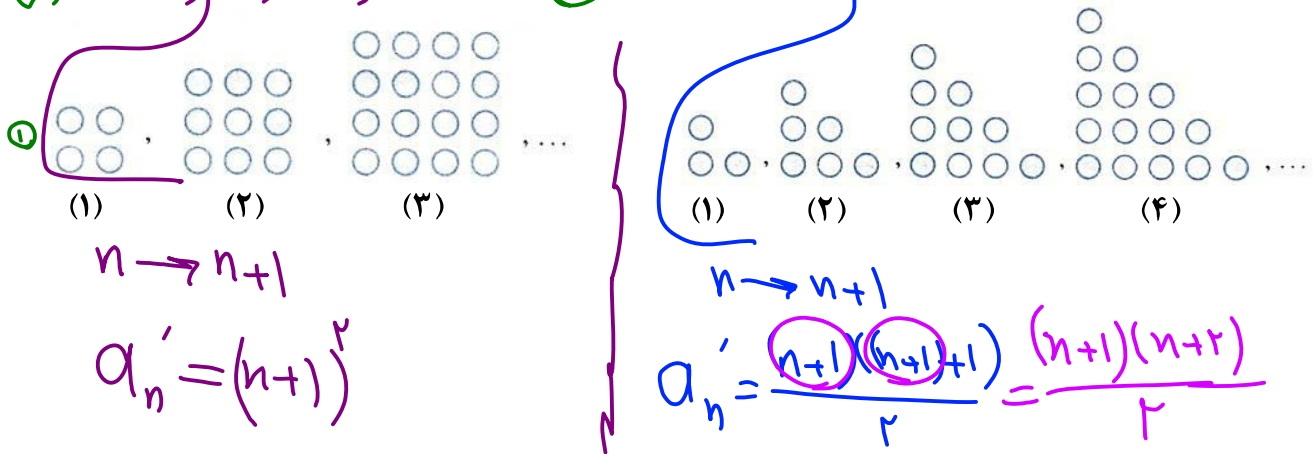
تعداد نقاط سیاه: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$
 $(1)^2 + 4(1) \quad (2)^2 + 4(2) \quad (3)^2 + 4(3) \quad n^2 + 4n$
 تعداد ردیف نقطه‌ها: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$
 $b_n = n+2 \rightarrow b_8 = 8+2 = 10$

نکته: دو الگوی بسیار مهم که یا مستقل و یا در قالب برخی الگوها دیده می‌شوند، الگوهای مربعی و مثلثی هستند.

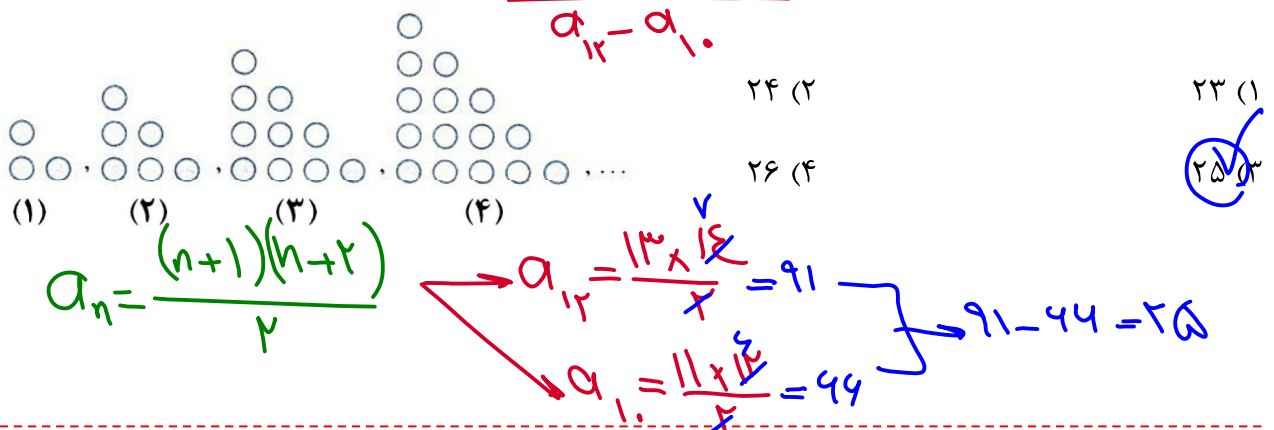
نام الگو	الگوی مربعی	الگوی مثلثی
شکل		
جمله عمومی	$a_n = n^2$	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

نکته: می‌توان الگوهای مربعی و مثلثی را از اول شروع نکرد. در این حالت در فرمول فوق به جای n ، شماره مرحله را بر حسب n می‌نویسیم. مثل:

شماره مرحله
... ۱۵، ۱۰، ۶، ۳، ۱ = مثالی عادی ... ۱۶، ۹ و ۴ و ۱ = مربعی



سوال: با توجه به الگوی مقابل، اختلاف جملات دهم و دوازدهم چند است؟ «تالیفی»



سوال: چندمین جمله از الگوی $a_n = \frac{5n-3}{n+9}$ برابر با جمله پنجم الگوی $b_n = \frac{n+2}{n^2-22}$ است؟ «میکرو-قرن»

هفتم (۱) $b_5 = \frac{5+2}{5^2-22} = \frac{7}{3}$ دهم (۲) $a_{10} = \frac{10+2}{10^2-22} = \frac{12}{78} = \frac{2}{13}$

$\frac{7}{3} = \frac{5n-3}{n+9} \rightarrow 7n-9 = 5n-3 \rightarrow 2n = 6 \rightarrow n = 3$

$11n = 72 \rightarrow n = 9$

سوال: الگوی b_n با جمله عمومی $b_n = 6n - 64$ چند جمله منفی دارد؟ «تالیفی»

۸ (۱) $b_n < 0 \rightarrow 6n - 64 < 0 \rightarrow 6n < 64 \rightarrow n < 10.66 \rightarrow n = 1, 2, \dots, 10$

انواع دنباله

تعریف دنباله: به هر تعداد عدد که پشت سر هم باشند، دنباله می‌گویند. این اعداد می‌توانند فاقد الگو یا دارای الگو باشند.



$$a = t_n - t_{n-1}$$

۱- دنباله خطی — یاد ریم ۱

۱- اگر اختلاف هر دو جمله متوالی یک عدد ثابت باشد:

✓ اولاً آن دنباله، حتماً یک دنباله خطی است؛ مثل همه دنباله‌های حسابی!

✓ دوماً آن عدد ثابت، ضریب n است. (همان شیب) — *یا همان قدر نسبت*

۲- جمله عمومی دنباله خطی $t_n = an + b$ است که در آن a همان ضریب n بوده و اختلاف هر دو جمله متوالی در دنباله خطی است.

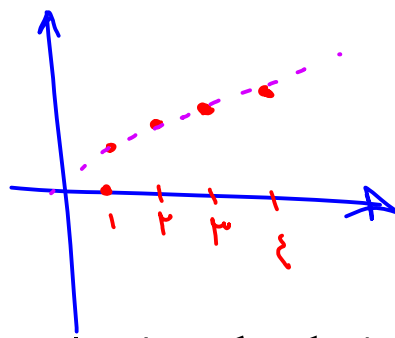
دنباله خطی (درجه ۱) $\rightarrow t_n = an + b$

مثل دنباله‌های حسابی

همان عدد است a به دنباله خطی به جملات اضافه می‌شود

همان قدر نسبت

$y = ax + b$ — *یادآوری خط: عرض از مبدا شیب*



تذکر: فقط توجه شود که n یک عدد طبیعی است پس اگر جملات دنباله خطی را رسم کنیم روی یک خط قرار می‌گیرند نه اینکه خود آن دنباله خط ایجاد کند.



سوال: در یک دنباله خطی جمله دوم و هفتم به ترتیب برابر ۱۳ و ۳۸ هستند. جمله هشتم چند واحد از جمله یازدهم کمتر است؟

$$a = 13 \quad 2a + b = 38 \quad \xrightarrow{(-i)} \quad b = 12$$

تالیفی

سوال: دو خط مستقیم به یکدیگر موازی و به یکدیگر عمودند و از یک نقطه می‌گذرند. اگر یکی از این خطوط معادله $2x + y = 13$ و دیگری $x + y = 11$ باشد، معادله خطی که از این دو خط می‌گذرد و به آن خط موازی است، چیست؟

پاسخ: $3x + 2y = 15$

تالیفی

یازدهم کمتر است؟

۱۰ (۴) $\begin{cases} 2a + b = 13 \\ -a - b = -13 \end{cases} \xrightarrow{\Delta (3)} \begin{cases} 2a + b = 13 \\ a = 12 \end{cases} \rightarrow b = 3$

۱۵ (۲) $\begin{cases} 11a + b = 11 \\ 12a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{\Delta (1)} \begin{cases} 11a + b = 11 \\ -a = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 3 \end{cases}$

۱۰ (۱) $t_n = an + b \rightarrow t_n = 2n + 3$

$t_{11} - t_n = (11a + b) - (na + b) = 10a = 10 \times 3 = 30$

سوال: در یک الگوی خطی، جمله هشتم ۲۴ واحد از جمله دوم بزرگ تر بوده و $t_9 = -64$ است. در این دنباله

$t_8 - t_2 = 24 \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow a = 6$

چند جمله غیر مثبت وجود دارد؟

مفروضه

تالیفی

چند جمله غیر مثبت وجود دارد؟ صفر و منفی

تالیفی $t_n - t_2 = 2\varepsilon = 9a \rightarrow a = \varepsilon$

$t_9 = -4\varepsilon \rightarrow -4\varepsilon = 9(a) + b \rightarrow -4\varepsilon - 34 = b$

$b = -100$

$t_n = \varepsilon n - 100 \leq 0$

$\Rightarrow \varepsilon n \leq 100 \rightarrow n \leq 25 \rightarrow n = 1, 2, \dots, 25$

۲- دنباله درجه دو

$$t_n = \underbrace{a}r^n + \underbrace{b}n + \underbrace{c}$$

✓ جملهٔ عمومی این دنباله به فرم کلی است.

با داشتن سه جمله از این دنباله می‌توان جمله عمومی دنباله درجه دو را پیدا کرد. a, b, c
 معالسه کرد

تذکره: کلی نکته در مورد سهمی و دنباله درجه دو همیشه گفت اما چون این جا کاربرد خاصی ندارند از گفتن آن ها صرف نظر می کنم.

سوال: در دنباله درجه دوم با جملات $\{... و ۳۰ و ۱۷ و ۸ و ۳\}$ ، جمله پنجم کدام است؟

سوال: در دنباله درجه دوم با جملات $\{ \dots, 30, 17, 8, 3 \}$ ، جمله پنجم کدام است؟

«تالیفی»

$a = 2$ (۴۶)
 $b = -1$ (۴۷)
 $c = 2$ (۴۸)

$t_1 = 3 \rightarrow a + b + c = 3$
 $t_2 = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1$
 $t_3 = 17 \rightarrow 9a + 3b + c = 17$

$2a + b = 2$
 $-3a - b = -5$
 $5a + b = 9$

$2a = 7$
 $t_n = an^2 + bn + c$

$t_n = 2n^2 - 1n + 2 \xrightarrow{n=5} t_5 = 2(5)^2 - 1(5) + 2 = 50 - 5 + 2 = 47$
 $t_5 = 47$

نکته: در یک دنباله درجه دوم، اختلاف جملات متوالی یک دنباله خطی می سازند با قدرنسبت! با همین

نکته سوال قبل را به دو روش حل می کنیم:

(الف) روش تشریحی:

$$t_n = 2n^2 + bn + c$$

$$t_1 = 3 \rightarrow 2 + b + c = 3 \rightarrow b + c = 1$$

$$t_2 = 8 \rightarrow 8 + 2b + c = 8 \rightarrow 2b + c = 0$$

$$b = -1, c = 2$$

$$t_n = 2n^2 - n + 2$$

(ب) روش تستی:

$$3, 8, 17, 30, \dots$$

$$+5, +9, +13, +17$$

$$+4, +4, +4$$

نکته: اگر اعداد یک دنباله حسابی (خطی) را طوری دسته بندی کنیم که تعداد جملات هر دسته با شماره آن دسته برابر

باشد (دسته اول ۱ جمله، دسته دوم ۲ جمله، دسته سوم ۳ جمله و ...)، در این صورت جملات اول دسته ها و جملات

آخر دسته ها نسبت به هم دو دنباله درجه دو متفاوت تشکیل می دهند.

سوال: مضارب مثبت عدد ۴ را طوری دسته بندی کردیم که تعداد جملات هر دسته با شماره آن دسته برابر

باشد؛ عدد وسط دسته بیست و پنجم چند است؟

۱۲۰۰ (۱)

۱۲۹۶ (۲)

۱۳۰۰ (۳)

۱۳۰۴ (۴)

۱۳۰۸ (۵)

۱۳۱۲ (۶)

۱۳۱۶ (۷)

۱۳۲۰ (۸)

۱۳۲۴ (۹)

۱۳۲۸ (۱۰)

۱۳۳۲ (۱۱)

۱۳۳۶ (۱۲)

۱۳۴۰ (۱۳)

۱۳۴۴ (۱۴)

۱۳۴۸ (۱۵)

۱۳۵۲ (۱۶)

۱۳۵۶ (۱۷)

۱۳۶۰ (۱۸)

۱۳۶۴ (۱۹)

۱۳۶۸ (۲۰)

۱۳۷۲ (۲۱)

۱۳۷۶ (۲۲)

۱۳۸۰ (۲۳)

۱۳۸۴ (۲۴)

۱۳۸۸ (۲۵)

تذکره: توجه شود که هر دسته‌بندی اعداد را نمی‌توان مشابه دسته‌بندی فوق فرض کرد! مثال بعد رو حل کن!

سوال: اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته، مربع کامل باشد. مجموع

جملات اول و آخر دسہ دھم کدام است؟

١٤٢ (١)

«میکرو-قرن»

آخر دسته دهم کدام است؟

۱۹۲ (۴) ۱۸۲ (۳) ۱۷۲ (۲)

۱ و ۲، ۳ و ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶

(۱) (۲) (۳) (۴)

$$n = \text{حجم آخر دسته} + \text{حجم اول دسته} = 112$$

$\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$

۳- دنباله‌های متفرقه

الف) دنباله‌های متناوب علامتی: اگر جمله اول منفی باشد، جمله عمومی در $(-1)^n$ و اگر جمله اول مثبت باشد، جمله عمومی در $(-1)^{n+1}$ ضرب شده است. مثال:

حصہ اول میں

$$a_n = (-1)^{n+1} \times n!$$

1, -4, 9, -16, 25, ...

$U_n \rightarrow 1, 2, 9, 14, 25 \rightarrow n \rightarrow \infty$

$$a_n = (-1)^n \times (2n-1)$$

 $-2, 7, -12, 17, -22, \dots$

~~متغير~~ $\rightarrow 12, 17, 22, \dots \rightarrow \bar{y} = an + b \rightarrow y = ax + b = -$

(ب) دنباله‌های بازگشتی: در این دنباله‌ها برای اینکه جمله جدید را بنویسیم به جملات قبل باز می‌گردیم. معروف ترین آن‌ها دنباله فیبوناچی است. در این دنباله به از دو جمله اول (که ۱ هستند)، همه جملات از جمع دو جمله قبل حاصل می‌شوند.

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad (t_2 = 1), (t_1 = 1)$$

ج) دنباله‌های ترکیبی: با جمع و تفریق دنباله‌های معروف و یا ضرب و تقسیم آن‌ها در عددی ثابت به دست می‌آیند. بهترین راه همان جدول کشیدن و فهمیدن رابطه بین آن‌هاست.

(د) اعداد اول: این اعداد قاعده مشخص ندارند و اگر دنباله مد نظر هیچ کدام از موارد فوق نباشد، این مورد را نیز بررسی می‌کنیم.

اعداد اول = ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ...

$$t_n = r \times \underbrace{k_n}_{\text{Kurs}}$$

$$K_n = \{r, r, \omega, r, \dots\}$$

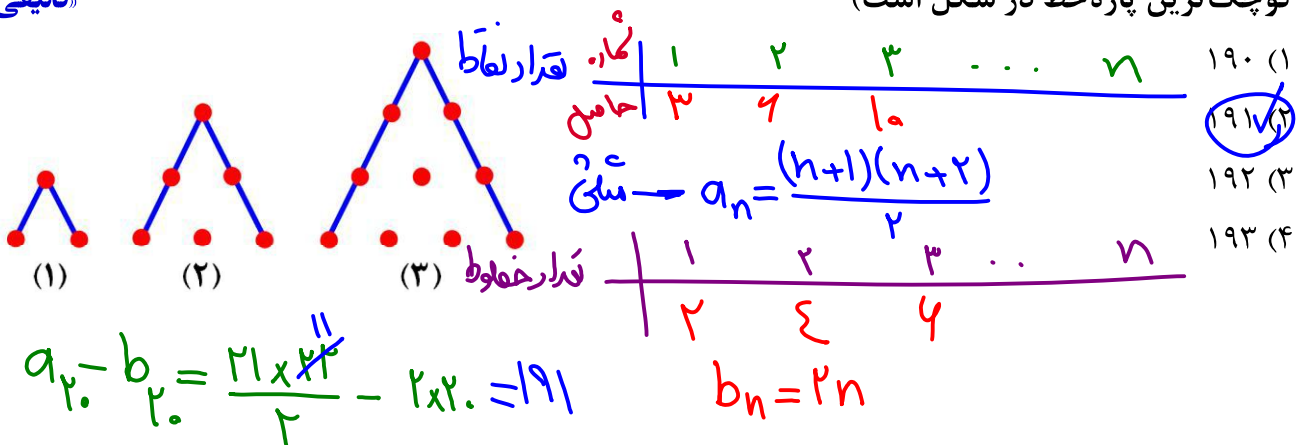
آزمون تستی الگو

سوال: در الگوی درجه دوم t_n با جملات مثبت، اگر $t_2=7$ و اختلاف جمله n ام و $(n+1)$ ام آن از ضابطه $4n+1$ به دست آید، جمله یازدهم آن کدام است؟

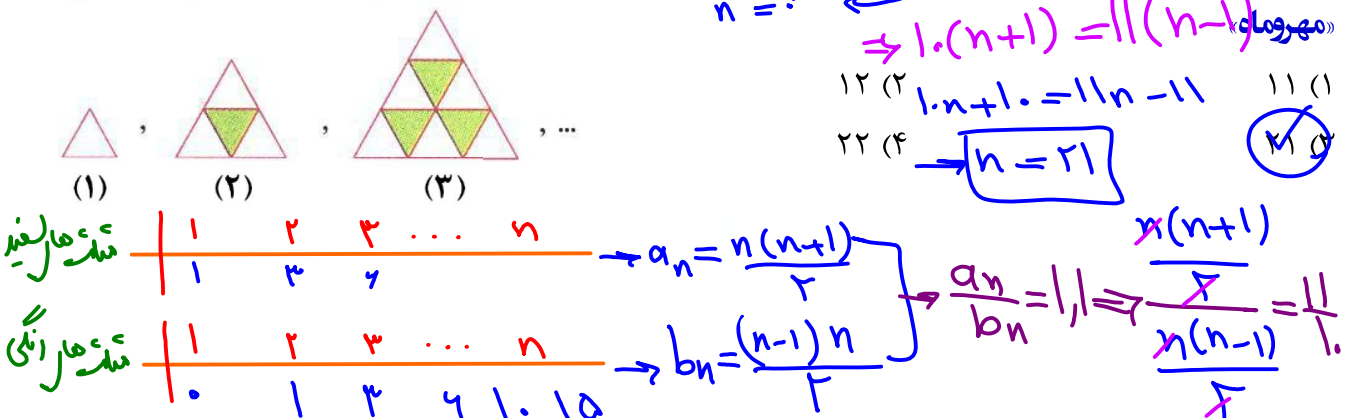
نزدیام جامع» $t_n = an^2 + bn + c$

۲۴۲ (۱) $t_n = 2n^2 - n + 1$
 ۲۳۲ (۲) $t_{11} = 2(11^2) - 11 + 1 = 232$
 ۲۵۴ (۳) $b_n = 4n + 1 \rightarrow n=1 \rightarrow b_1=5$
 ۲۴۴ (۴) $n=2 \rightarrow b_2=9$
 ۲۵۴ (۳) $t_1=2 \rightarrow 2(1)^2 + b(1) + c = 2$
 ۲۴۴ (۴) $t_2=7 \rightarrow 2(2)^2 + b(2) + c = 7$
 $b+c=0$
 $2b+c=-1$
 $b=-1, c=1$

سوال: در الگوی زیر، اختلاف تعداد نقاط و پاره خطها در شکل بیستم چند عدد است؟ (منظور از پاره خط کوچک ترین پاره خط در شکل است)



سوال: با توجه به شکل زیر، در کدام شکل نسبت تعداد مثلث های سفید به تعداد مثلث های رنگی ۱/۱ است؟

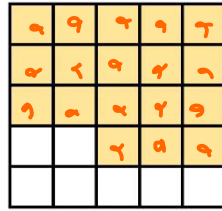
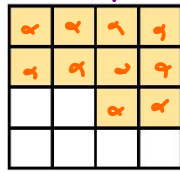
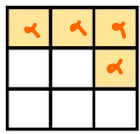


نکته: در حد کتاب دهم اگر دنباله های خطی، فیبوناچی و یا اعداد اول نباشد، به احتمال فراوان درجه دو است. پس سعی کنیم با استفاده از اطلاعات جمله عمومی آن را پیدا کرده و سوال را حل کنیم.

سوال: در شکل زیر، تقریباً چند درصد از مربع‌های کوچک در شکل بیستم رنگی هستند؟

«تالیفی»

تعداد مربعها $b_n = (n+2)^2$



(۳)

تعداد رنگیها (۱) $\times 100 = \frac{\text{تعداد رنگیها}}{\text{تعداد کل مربعها}} \times 100$

$= \frac{(2)^2 + 3(2)}{(2+2)^2} \times 100 = \frac{4+6}{16} \times 100 = \frac{10}{16} \times 100 = 62.5\%$

درمورد n

درمورد n

(۳)

$t_1 = 2$

$t_2 = 1$

$t_n = n^2 + 3n$

تعداد مربعها رنگی

۶۵ (۱)

۷۵ (۲)

۸۵ (۳)

۹۵ (۴)

سوال: اگر در یک دنباله، جمله $(3n-1)$ ام به صورت $(4n^2+6n+1)$ باشد، جمله پنجم این دنباله چند است؟

«تالیفی»

$t_{(3n-1)} = 4n^2 + 6n + 1$

۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۲۷ (۲)

۲۵ (۱)

$\Rightarrow 3n-1=5 \rightarrow 3n=6 \rightarrow n=2$

$n=2 \rightarrow t_5 = 4(2)^2 + 6(2) + 1 = 16 + 12 + 1 = 29$

«میکرو-قرن»

سوال: در الگو با جمله عمومی $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ، مجموع جملات اول تا پانزدهم کدام است؟

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{15} = ?$
 $(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{16}-\sqrt{15})$
 $= \sqrt{16} - \sqrt{1} = 4 - 1 = 3$

۲ (۱)

«آزمون‌های گاج»

سوال: مجموع ۳۹ جمله اول دنباله $t_n = \frac{3}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+4}}$ کدام است؟

$t_n = \frac{3}{(\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n+4})} \times \frac{(\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+4})}{(\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+4})} = \frac{3(\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+4})}{(3n+1) - (3n+4)}$

صورت درمزد دمی آن - برای توانیدن کسر

$\Rightarrow t_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$

$t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{39}$

$(\sqrt{7}-\sqrt{4}) + (\sqrt{10}-\sqrt{7}) + (\sqrt{13}-\sqrt{10}) + \dots + (\sqrt{121}-\sqrt{118})$

$11-2=9$

$\sqrt{121} - \sqrt{4} = 11 - 2 = 9$

۱۰ (۱)

«سراسری انسانی»

سوال: جمله ۴۰ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{1+a_n} & \text{فرد } n \end{cases}$ کدام است؟

(۱) ۲
 (۲) ۱
 (۳) ۰/۵
 (۴) صفر

زنجیره
 ۱ = جمله فرد
 ۱/۲ = جمله زوج

۱/۲
 ۱/۴
 ۱/۶
 ...
 ۱/۲۰
 ۱/۲۲
 ۱/۲۴

جمله اول
 جمله دوم
 جمله سوم

جمله فرد
 جمله زوج

$$-\sqrt{144 \times 2} = -\sqrt{(12)^2 \times 2} = -12\sqrt{2}$$

سوال: در یک دنباله $a_1 = 2\sqrt{2}$ و $a_n - a_{n+1} = \sqrt{n}$ است. جمله چندم این دنباله $\sqrt{288}$ است؟

اختلاف دو جمله‌ی nام و (n+1)ام
 ضرایب ← همان منبر
 n است!

در (1) منبر n
 $a_{n+1} - a_n = -\sqrt{n} = -\sqrt{2 \times n} = -2\sqrt{n}$
 در nام منبر

1. (2) $-12\sqrt{n} = (-2\sqrt{n})n + 6\sqrt{n}$
 $-12 = -2n + 6 \Rightarrow n = 9$

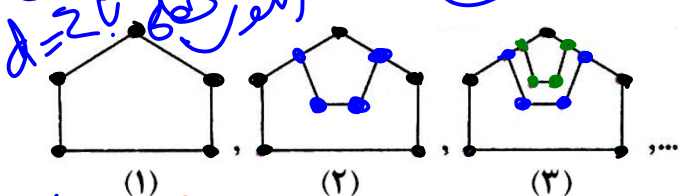
$$t_n = an + b = (-\sqrt{r})n + b \rightarrow t_1 = \sqrt{r} \rightarrow (-\sqrt{r})(1) + b = \sqrt{r} \rightarrow b = 2\sqrt{r}$$

$$\rightarrow t_n = (-1\sqrt{r})n + \varepsilon\sqrt{r} \rightarrow t_\infty = -1\sqrt{r}$$

سوال: در دنباله ای با جمله n ام a_n ، $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ و $a_1 = 1$ است. جمله هشتم کدام می باشد؟

$a_{n+1} = a_n + (n+1) \rightarrow a_1 = 1$ $a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10$
 $n=1 \rightarrow a_1 = 1 + (1) = 2$ $a_5 = 15, a_6 = 21$
 $n=2 \rightarrow a_2 = 2 + 2 = 4$ $a_7 = 28, a_8 = 36$
 $n=3 \rightarrow a_3 = 4 + 3 = 7$ $a_9 = 45, a_{10} = 55$
 $n=4 \rightarrow a_4 = 7 + 4 = 11$ $a_{11} = 66, a_{12} = 78$
 $n=5 \rightarrow a_5 = 11 + 5 = 16$ $a_{13} = 91, a_{14} = 105$
 $n=6 \rightarrow a_6 = 16 + 6 = 22$ $a_{15} = 120, a_{16} = 136$
 $n=7 \rightarrow a_7 = 22 + 7 = 29$ $a_{17} = 155, a_{18} = 171$
 $n=8 \rightarrow a_8 = 29 + 8 = 37$ $a_{19} = 196, a_{20} = 217$
 $n=9 \rightarrow a_9 = 37 + 9 = 46$ $a_{21} = 243, a_{22} = 270$
 $n=10 \rightarrow a_{10} = 46 + 10 = 56$ $a_{23} = 296, a_{24} = 325$
 $n=11 \rightarrow a_{11} = 56 + 11 = 67$ $a_{25} = 355, a_{26} = 391$
 $n=12 \rightarrow a_{12} = 67 + 12 = 79$ $a_{27} = 420, a_{28} = 457$
 $n=13 \rightarrow a_{13} = 79 + 13 = 92$ $a_{29} = 491, a_{30} = 528$
 $n=14 \rightarrow a_{14} = 92 + 14 = 106$ $a_{31} = 568, a_{32} = 604$
 $n=15 \rightarrow a_{15} = 106 + 15 = 121$ $a_{33} = 651, a_{34} = 686$
 $n=16 \rightarrow a_{16} = 121 + 16 = 137$ $a_{35} = 740, a_{36} = 774$
 $n=17 \rightarrow a_{17} = 137 + 17 = 154$ $a_{37} = 835, a_{38} = 868$
 $n=18 \rightarrow a_{18} = 154 + 18 = 172$ $a_{39} = 936, a_{40} = 978$
 $n=19 \rightarrow a_{19} = 172 + 19 = 191$ $a_{41} = 1043, a_{42} = 1084$
 $n=20 \rightarrow a_{20} = 191 + 20 = 211$ $a_{43} = 1156, a_{44} = 1201$
 $n=21 \rightarrow a_{21} = 211 + 21 = 232$ $a_{45} = 1275, a_{46} = 1324$
 $n=22 \rightarrow a_{22} = 232 + 22 = 254$ $a_{47} = 1400, a_{48} = 1452$
 $n=23 \rightarrow a_{23} = 254 + 23 = 277$ $a_{49} = 1531, a_{50} = 1596$
 $n=24 \rightarrow a_{24} = 277 + 24 = 301$ $a_{51} = 1668, a_{52} = 1746$
 $n=25 \rightarrow a_{25} = 301 + 25 = 326$ $a_{53} = 1811, a_{54} = 1801$
 $n=26 \rightarrow a_{26} = 326 + 26 = 352$ $a_{55} = 1960, a_{56} = 1961$
 $n=27 \rightarrow a_{27} = 352 + 27 = 379$ $a_{57} = 2115, a_{58} = 2027$
 $n=28 \rightarrow a_{28} = 379 + 28 = 407$ $a_{59} = 2276, a_{60} = 2199$
 $n=29 \rightarrow a_{29} = 407 + 29 = 436$ $a_{61} = 2443, a_{62} = 2376$
 $n=30 \rightarrow a_{30} = 436 + 30 = 466$ $a_{63} = 2616, a_{64} = 2460$
 $n=31 \rightarrow a_{31} = 466 + 31 = 497$ $a_{65} = 2795, a_{66} = 2551$
 $n=32 \rightarrow a_{32} = 497 + 32 = 529$ $a_{67} = 2980, a_{68} = 2648$
 $n=33 \rightarrow a_{33} = 529 + 33 = 562$ $a_{69} = 3171, a_{70} = 2751$
 $n=34 \rightarrow a_{34} = 562 + 34 = 596$ $a_{71} = 3368, a_{72} = 2860$
 $n=35 \rightarrow a_{35} = 596 + 35 = 631$ $a_{73} = 3571, a_{74} = 2975$
 $n=36 \rightarrow a_{36} = 631 + 36 = 667$ $a_{75} = 3780, a_{76} = 3096$
 $n=37 \rightarrow a_{37} = 667 + 37 = 704$ $a_{77} = 3995, a_{78} = 3223$
 $n=38 \rightarrow a_{38} = 704 + 38 = 742$ $a_{79} = 4216, a_{80} = 3356$
 $n=39 \rightarrow a_{39} = 742 + 39 = 781$ $a_{81} = 4443, a_{82} = 3495$
 $n=40 \rightarrow a_{40} = 781 + 40 = 821$ $a_{83} = 4676, a_{84} = 3640$
 $n=41 \rightarrow a_{41} = 821 + 41 = 862$ $a_{85} = 4915, a_{86} = 3791$
 $n=42 \rightarrow a_{42} = 862 + 42 = 904$ $a_{87} = 5160, a_{88} = 3948$
 $n=43 \rightarrow a_{43} = 904 + 43 = 947$ $a_{89} = 5411, a_{90} = 4111$
 $n=44 \rightarrow a_{44} = 947 + 44 = 991$ $a_{91} = 5668, a_{92} = 4280$
 $n=45 \rightarrow a_{45} = 991 + 45 = 1036$ $a_{93} = 5931, a_{94} = 4455$
 $n=46 \rightarrow a_{46} = 1036 + 46 = 1082$ $a_{95} = 6200, a_{96} = 4636$
 $n=47 \rightarrow a_{47} = 1082 + 47 = 1129$ $a_{97} = 6475, a_{98} = 4823$
 $n=48 \rightarrow a_{48} = 1129 + 48 = 1177$ $a_{99} = 6756, a_{100} = 5016$
 $n=49 \rightarrow a_{49} = 1177 + 49 = 1226$ $a_{101} = 7043, a_{102} = 5216$
 $n=50 \rightarrow a_{50} = 1226 + 50 = 1276$ $a_{103} = 7336, a_{104} = 5423$
 $n=51 \rightarrow a_{51} = 1276 + 51 = 1327$ $a_{105} = 7635, a_{106} = 5636$
 $n=52 \rightarrow a_{52} = 1327 + 52 = 1379$ $a_{107} = 7940, a_{108} = 5855$
 $n=53 \rightarrow a_{53} = 1379 + 53 = 1432$ $a_{109} = 8251, a_{110} = 6080$
 $n=54 \rightarrow a_{54} = 1432 + 54 = 1486$ $a_{111} = 8568, a_{112} = 6311$
 $n=55 \rightarrow a_{55} = 1486 + 55 = 1541$ $a_{113} = 8891, a_{114} = 6548$
 $n=56 \rightarrow a_{56} = 1541 + 56 = 1597$ $a_{115} = 9220, a_{116} = 6791$
 $n=57 \rightarrow a_{57} = 1597 + 57 = 1654$ $a_{117} = 9555, a_{118} = 7040$
 $n=58 \rightarrow a_{58} = 1654 + 58 = 1712$ $a_{119} = 9906, a_{120} = 7295$
 $n=59 \rightarrow a_{59} = 1712 + 59 = 1771$ $a_{121} = 10273, a_{122} = 7556$
 $n=60 \rightarrow a_{60} = 1771 + 60 = 1831$ $a_{123} = 10646, a_{124} = 7823$
 $n=61 \rightarrow a_{61} = 1831 + 61 = 1892$ $a_{125} = 11025, a_{126} = 8096$
 $n=62 \rightarrow a_{62} = 1892 + 62 = 1954$ $a_{127} = 11410, a_{128} = 8375$
 $n=63 \rightarrow a_{63} = 1954 + 63 = 2017$ $a_{129} = 11801, a_{130} = 8660$
 $n=64 \rightarrow a_{64} = 2017 + 64 = 2081$ $a_{131} = 12198, a_{132} = 8951$
 $n=65 \rightarrow a_{65} = 2081 + 65 = 2146$ $a_{133} = 12601, a_{134} = 9248$
 $n=66 \rightarrow a_{66} = 2146 + 66 = 2212$ $a_{135} = 13010, a_{136} = 9551$
 $n=67 \rightarrow a_{67} = 2212 + 67 = 2279$ $a_{137} = 1342$

سوال: با توجه به الگوی زیر، تعداد نقاط رنگی در کدام مرحله برابر ۳۹۷ است؟



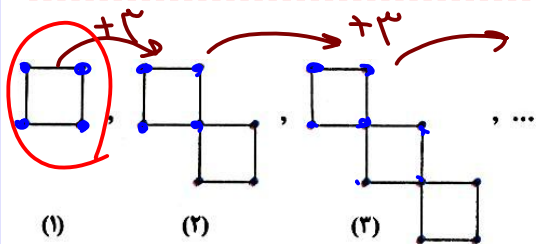
(1) (2) (3) ... (n) 1...-1
 تعداد اولی | (0xε) + Δ { (1xε) + Δ } { (2xε) + Δ } ... { (nxε) + Δ }

$$a_n = \varepsilon(n-1) + \Delta$$

$$a_n = \varepsilon n - \varepsilon + \Delta \rightarrow a_n = \varepsilon n + 1$$

دو سوال قشنگ از کتاب میکرو قرن جدید:

در الگوی شکل مقابل، اگر تعداد نقاط روی یکی از شکل‌ها ۳۱ باشد، تعداد پاره‌خط‌ها در این شکل کدام است؟



$$a_n = 3n + 1$$

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3$$

$$b_1 = 2 \times 1 = 2$$

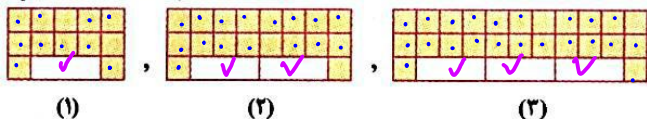
نقاط

$$b_n = 2 \times n$$

۳۶ (۱)	۱	۲	۳	...	n
۴۰ (۲)	۱	۲	۳	...	n

در الگوی زیر، نسبت تعداد کاشی‌های رنگی به سفید، در مرحله پنجاهم کدام است؟ (طول هر کاشی سفید، سه برابر هر کاشی رنگی است.)

(برگرفته از کتاب درسی)



سفید

$$a_n = n$$

رنگی	۱	۲	۳	...	n
	۱۲	۱۸	۲۴		

$$t_n = 4n + 4$$

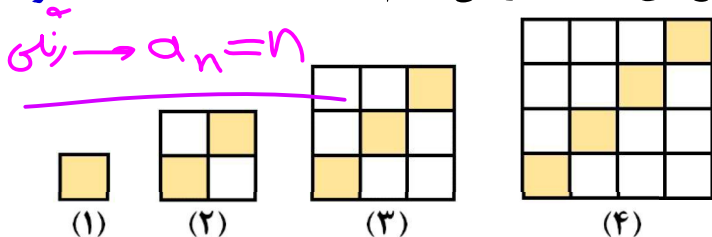
$$t_n = 4n + 4$$

$$\frac{t_n}{a_n} = \frac{4(n+1)}{n} = 4 + \frac{4}{n}$$

۶/۱۲ (۱)
۶/۱۲ (۲)
۳/۱۲ (۳)
۲/۰۴ (۴)

نردبام

سوال: در الگوی مقابل در شکل نودم، نسبت مربع‌های سفید به رنگی کدام است؟



سفید	۱	۲	۳	۴	...	n
	۰	۱	۴	۹		

$$t_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$t_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

۸۹ (۱)
۹۰ (۲)
۹۱ (۳)
۹۲ (۴)

تالیفی

سوال: اگر در دنباله $a_n = \frac{kn^2 + bn - c}{n^2 - 3n - 4}$ ، $a_n - a_{n-1} = 0$ و $a_3 = 4$ باشد، حاصل $kb + c$ کدام است؟

$$-2 \times 14 + 12 = -28$$

$$a_n - a_{n-1} = 0 \rightarrow a_2 - a_1 = 0 \text{ و } a_3 - a_2 = 0$$

دسته‌بندی است!

دسته‌بندی است!

$$a_n = \frac{kn^2 + bn - c}{n^2 - 3n - 4}$$

$$k = 4, b = -12, c = 12$$

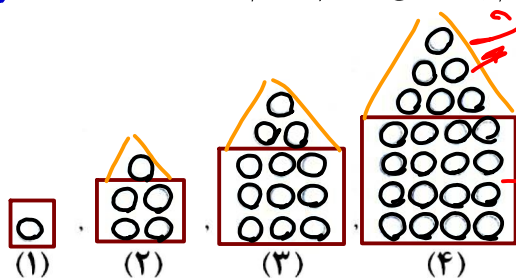
«تاج»

سوال: در دنباله ای با جمله عمومی $a_n = \frac{41-3n}{4}$ چند جمله در بازه $(0, 2)$ قرار دارد؟

$$0 < a_n < 2 \rightarrow 0 < \frac{41-3n}{4} < 2 \rightarrow 0 < 41-3n < 8 \rightarrow -41 < -3n < -33 \xrightarrow{\times -1} 33 < 3n < 41 \rightarrow 11 < n < 13.67 \rightarrow n = 12, 13$$

«نردبام»

سوال: با توجه به الگوی مقابل، نسبت گوی های شکل دوازدهم به شکل هفتم کدام است؟



$$a_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{a_{12}}{a_7} = \frac{12^2 + \frac{12 \times 11}{2}}{7^2 + \frac{7 \times 6}{2}} = \frac{144 + 66}{49 + 21} = \frac{210}{70} = 3$$

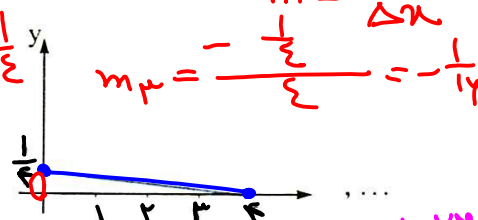
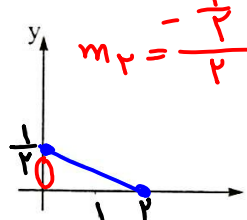
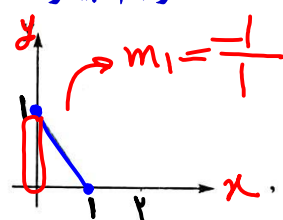
- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{12}{7}$
(۳) $\frac{2}{7}$
(۴) $\frac{3}{2}$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad n$$

$$(1)^2 + 0 \quad (2)^2 + 1 \quad (3)^2 + 3 \quad (4)^2 + 6 \quad \dots \quad n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

سوال: در الگوی شکل زیر، اختلاف شیب پاره خط پنجم با پاره خط مرحله دهم چند برابر 2^{-18} است؟

«نردبام-پیشرفته»



- (۱) ۵۱۲
(۲) ۵۱۱
(۳) ۱۰۲۴

$$m_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2^{1-n}$$

$$m_5 = -2^{1-5} = -2^{-4} = -\frac{1}{16}$$

$$m_{10} = -2^{1-10} = -2^{-9} = -\frac{1}{512}$$

$$m_{10} - m_5 = -\frac{1}{512} - \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{512} + \frac{32}{512} = \frac{31}{512}$$

سوال: اگر n شامل اعداد طبیعی موجود در فاصله $(15, 60)$ و $a_n = \frac{3n-4}{2}$ باشد:

(الف) حدود a_n را بنویسید:

$$15 < n < 60 \xrightarrow{\times 3} 45 < 3n < 180 \xrightarrow{-4} 41 < 3n-4 < 176$$

$$\div 2 \rightarrow 20.5 < \frac{3n-4}{2} < 88 \rightarrow 20.5 < a_n < 88$$

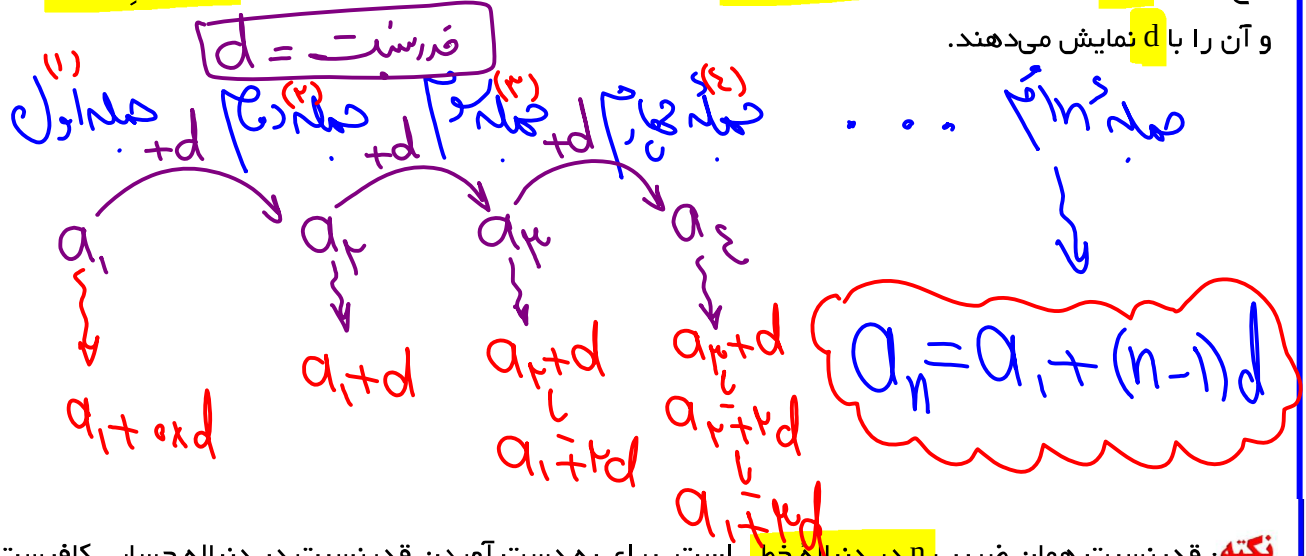
(ب) به ازای چند مقدار n ، جملات دنباله a_n کمتر یا مساوی ۲۵ هستند؟

$$a_n \leq 25 \rightarrow \frac{3n-4}{2} \leq 25 \rightarrow 3n-4 \leq 50 \rightarrow 3n \leq 54 \rightarrow n \leq 18$$

$$\Rightarrow 3n \leq 54 \rightarrow n \leq 18 \rightarrow 15 < n < 18 \rightarrow n = 16, 17, 18$$

دنباله حسابی

نوع دنباله خطی است که با افزودن یک عدد ثابت به جملات آن به وجود می‌آید. به آن عدد ثابت **قدرنسبت** می‌گویند و آن را با d نمایش می‌دهند.



نکته: قدرنسبت همان ضریب n در دنباله خطی است. برای به دست آوردن قدرنسبت در دنباله حسابی کافیست هر جمله را منهای جمله قبل کنیم:

$$a_2 - a_1 = d$$

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$$a_2 - a_{17} = 15d$$

سوال: در رابطه با دنباله حسابی «... و ۱۴ و ۱۰ و ۶ و ۲» پاسخ دهید:

$$d = 4 \leftarrow +4 + 2 + 4$$

$$a_1 = 2$$

(الف) جمله عمومی آن را بنویسید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 2 + (n-1)4$$

$$a_n = 4n - 2$$

(ب) جمله بیستم را بر حسب جملات هشتم و شانزدهم بنویسید:

$$a_{20} = a_8 + 12d \quad a_{20} = a_{16} + 4d$$

(پ) جمله چندم این دنباله ۶۶ است؟

$$4n - 2 = 66 \rightarrow 4n = 68 \Rightarrow n = 17 \quad a_{17} = 66$$

نکته: با داشتن دو جمله غیرمتوالی نیز می‌توان قدرنسبت را محاسبه کرد. با این فرمول:

$$a_{20} = a_1 + 19d$$

$$a_{20} - a_1 = (20-1)d$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

سوال: در یک دنباله حسابی جملات هشتم و دوازدهم به ترتیب ۸- و ۱۲ هستند. جمله چندم این دنباله ۵۷ است؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -8 + (n-1)d$$

$$a_{12} = 12 \rightarrow a_{12} - a_8 = 4d \rightarrow 12 - (-8) = 4d \rightarrow 20 = 4d \rightarrow d = 5$$

$$a_8 = -8 \rightarrow a_1 + 7d = -8 \rightarrow a_1 = -8 - 35 = -43 \rightarrow 5(n-1) = 100 \Rightarrow n-1 = 20 \Rightarrow n = 21$$

سوال: در یک دنباله حسابی $a_{n-2} = a_n + 8$ و $a_3 = 10$ است. چند جمله از این دنباله بین (-46) و (18) قرار دارد؟

$$a_{n-2} = a_n + 8 \rightarrow a_n - a_{n-2} = -8 \rightarrow 2d = -8 \rightarrow d = -4$$

$$a_3 = 10 \rightarrow a_1 + 2d = 10 \rightarrow a_1 + 2(-4) = 10 \rightarrow a_1 = 18$$

$$a_n = 18 - 4(n-1) \rightarrow -44 < 18 - 4n < 18 \rightarrow 12n < 14 \rightarrow n < 1.66 \rightarrow n = 1$$

سوال: در یک دنباله حسابی جملات m ام و n ام به ترتیب برابر n و m هستند. اگر این دنباله تنها چهار جمله مثبت داشته باشد، حداکثر مقدار ممکن برای a_2 چقدر است؟

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{n - m}{m - n} = -1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = a_1 - n + 1$$

$$a_n > 0 \rightarrow a_1 - n + 1 > 0 \rightarrow n < a_1 + 1 \rightarrow a_{1(mom)} = 4$$

$$a_4 = a_1 + d = 4 + (-1) = 3$$

رابطه اندیسی در دنباله حسابی

در دنباله حسابی چون جملات روی یک خط (شیب ثابت) قرار دارند، پس می توان گفت:

$$m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

$$1 + 1 = 10 + 2 \rightarrow a_1 + a_1 = a_{10} + a_2$$

سوال: در یک دنباله حسابی مجموع جملات هشتم و دهم برابر ۲۰ است. اگر $a_1 = 4$ باشد، آنگاه جمله هفدهم این دنباله چند است؟

$$a_8 + a_{10} = 20 \rightarrow (a_1 + 7d) + (a_1 + 9d) = 20 \rightarrow 2a_1 + 16d = 20 \rightarrow a_1 + 8d = 10$$

$$a_1 = 4 \rightarrow 4 + 8d = 10 \rightarrow 8d = 6 \rightarrow d = \frac{3}{4}$$

$$a_{17} = a_1 + 16d = 4 + 16 \times \frac{3}{4} = 4 + 12 = 16$$

سوال: در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول برابر ۱۵ و جمله بزرگتر برابر ۸ است. جمله چندم این دنباله برابر ۲۳ است؟

«تالیفی»

$$a-d, a, a+d \xrightarrow{+d, +d} (a-d) + a + (a+d) = 15 \rightarrow 3a = 15 \rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow a+d=8 \rightarrow d=3$$

جمله اول: ۵، جمله دوم: ۸، جمله سوم: ۱۱

$$\Rightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$$

$$\Rightarrow a_n = 23 \Rightarrow 5 + 3(n-1) = 23$$

$$\Rightarrow 3(n-1) = 18 \Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

سوال: در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۳۰ است. اگر جمله دوم این دنباله برابر ۳ باشد، این دنباله چند جمله کوچکتر از ۴۰ دارد؟

«تالیفی»

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d \xrightarrow{+d, +d, +d, +d} 5a = 30 \rightarrow a = 6$$

$$* a-d=3 \rightarrow d=3$$

جمله اول: ۰، جمله دوم: ۳، جمله سوم: ۶

$$a_n = 0 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = 3n-3$$

$$a_n < 40 \rightarrow 3n-3 < 40 \rightarrow 3n < 43 \rightarrow n < 14.33 \rightarrow n \leq 14$$

سوال: مجموع چهار جمله اول از یک دنباله حسابی برابر ۳۶ است. اگر جمله چهارم این دنباله ۶ برابر جمله دوم باشد، جمله یازدهم این دنباله چند است؟

«تالیفی»

$$a-3d, a-d, a+d, a+3d \xrightarrow{+2d, +2d, +2d} 4a = 36 \rightarrow a = 9$$

$$* (a+3d) = 4(a-d) \rightarrow a+3d = 4a-4d \rightarrow 5a = 9d \rightarrow d = 5$$

جمله اول: -۶، جمله دوم: -۱، جمله سوم: ۴، جمله چهارم: ۹

$$a_n = -6 + (n-1) \cdot 5$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = -6 + 10 \cdot 5 = 44$$

نکته: فرض کنید مجموع k جمله از یک دنباله حسابی را دارید، اگر جمع اندیس‌های موجود $k.m$ شود، در این صورت به جای کل مجموع قبلی، می‌توانید $k.m$ را بگذارید:

$$a_1 + a_3 + a_5 \xrightarrow[3 \times 2 = 12]{1+3+5=9} 3 \times a_2$$

سوال: در یک دنباله حسابی، $t_5 - t_2 = 2100$ و $t_5 = 35$ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟ **مهرماه جامع**

$$\begin{aligned} (t_5 + t_2)(t_5 - t_2) &= 2100 \\ (35 + t_2)(35 - t_2) &= 2100 \\ 35^2 - t_2^2 &= 2100 \\ 1225 - t_2^2 &= 2100 \\ t_2^2 &= 1225 - 2100 \\ t_2^2 &= -875 \end{aligned}$$

دورمه

سوال: در یک دنباله حسابی، مجموع جملات هفتم تا نهم برابر ۱۲ است. در این دنباله حاصل $t_5 + t_6 + \dots + t_{11}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} a_7 + a_8 + a_9 &= 12 \\ 3a_8 &= 12 \Rightarrow a_8 = 4 \\ a_5 + a_6 + \dots + a_{11} &= 54 \\ 7a_8 &= 54 \Rightarrow a_8 = \frac{54}{7} \end{aligned}$$

شرط تشکیل دنباله حسابی

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، در این صورت جمله وسطی (b) میانگین جملات کناری (a و c) است.

$$\begin{aligned} a, b, c, \dots \\ b = \frac{a+c}{2} \\ d = b - a = c - b \\ 2b = a + c \end{aligned}$$

در این صورت b را واسطه حسابی a و c می‌نامیم.

سوال: اعداد $2x-1, 3x+7, 5x+1$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ **مهرماه**

$$\begin{aligned} 2x-1 &= a \\ 3x+7 &= b \\ 5x+1 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b &= a + c \\ 2(3x+7) &= (2x-1) + (5x+1) \\ 6x+14 &= 7x \\ x &= 14 \end{aligned}$$

$$d = b - a = (3x+7) - (2x-1) = x+8 = 14+8 = 22$$

نکته: اگر سه جمله با فاصله برابر از یکدیگر در یک دنباله حسابی را داشته باشیم نیز می‌توان واسطه حسابی را تعریف کرد.

سوال: اعداد $16-x$, $2x+3$, $3x$ به ترتیب جملات پنجم، نهم و سیزدهم از یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$a_5 = 16 - x, a_9 = 2x + 3, a_{13} = 3x$$

$$a_9 - a_5 = 4d \Rightarrow (2x + 3) - (16 - x) = 4d \Rightarrow 3x - 13 = 4d$$

$$a_{13} - a_9 = 4d \Rightarrow 3x - (2x + 3) = 4d \Rightarrow x - 3 = 4d$$

$$3x - 13 = 4d$$

$$x - 3 = 4d$$

$$2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$d = -\frac{1}{4}$$

$$a_9 - a_5 = 4d \Rightarrow (2x + 3) - (16 - x) = 4d$$

$$\Rightarrow -x + 3 = 4d \Rightarrow d = -\frac{1}{4}$$

تشخیص دنباله حسابی ← باید درجه ۱ یا درجه ۰ باشد!

فقط کافیست دقت کنی که دنباله حسابی همون دنباله خطی است؛ چه خط با شیب d و چه خط با شیب صفر (دنباله ثابت).

سوال: کدام یک از جمله‌های عمومی داده شده نمی‌تواند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد؟ ← باید خط نباشد! (میکروگاج)

$$(1) \frac{2n^2 + n}{n}$$

$$(2) \sqrt{n^2 + 6n + 9}$$

$$(3) \frac{1}{n+1}$$

$$(4) \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$$

$$\frac{2n^2 + n}{n} = 2n + 1$$

$$\sqrt{n^2 + 6n + 9} = n + 3$$

$$\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

سوال: اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی $a_n = (p+1)n^3 + (p-q)n^2 + pn + q$ باشد، a_4 کدام است؟

$$a_n = (p+1)n^3 + (p-q)n^2 + pn + q$$

$$a_4 = (p+1)4^3 + (p-q)4^2 + 4p + q$$

$$a_4 = 64(p+1) + 16(p-q) + 4p + q$$

$$a_4 = 64p + 64 + 16p - 16q + 4p + q$$

$$a_4 = 84p - 15q + 64$$

$$p+1 = 0 \Rightarrow p = -1$$

$$p-q = 0 \Rightarrow p = q = -1$$

$$a_4 = -84 + 15 + 64 = -5$$

نکته: اگر در دنباله حسابی قدرنسبت مثبت باشد، دنباله صعودی است؛ اگر قدرنسبت منفی باشد، دنباله نزولی است، و اگر قدرنسبت صفر باشد، دنباله ثابت است (که یک دنباله هم صعودی و هم نزولی در نظر گرفته می‌شود).

سوال: اگر دنباله حسابی $a_n = (m^2 - 4)n^2 + 2(m+2)n + k$ ، یک دنباله هم صعودی و هم نزولی و $a_1 = 6$ باشد، حاصل $a_2 + m$ کدام است؟
 «تالیفی» $a_n = k$ ثابت

$* m^2 - 4 = 0 \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow m = \pm 2$ $* m + 2 = 0 \rightarrow m = -2$
 $a_1 = a_2 = a_3 = a_n = k = 4$

سوال: مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی نزولی ۳۶ و حاصل ضرب آن ها ۲۷۶ است. عدد بزرگتر کدام است؟
 «میکروکاج» ۱۹ (۴) ۲۵ (۳) ۲۳ (۲) ۲۱ (۱)

در دنباله نزولی اولین جمله بزرگترین جمله است!
 $a-d, a, a+d$ $3a = 36 \rightarrow a = 12$
 $(a-d) \times a \times (a+d) = 276 \rightarrow a(a^2 - d^2) = 276 \Rightarrow 12(144 - d^2) = 276 \Rightarrow 144 - d^2 = 23 \Rightarrow d^2 = 121 \Rightarrow d = 11$
 بزرگترین $12 - (-11) = 23$

سوال: اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، محیط آن چند است؟
 «تالیفی» $3d + 4d + 5d = 12d = 12 \times 5 = 60$

مساحت $= \frac{1}{2} \times (3d) \times (4d) = \frac{1}{2} \times a \times (a-d) = 15$
 $\Rightarrow a(a-d) = 30 \Rightarrow 5d \times 4d = 30 \Rightarrow d^2 = 1.5 \Rightarrow d = 1.5$
 $d = 5$
 محیط $\rightarrow (a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2$
 $\Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + a^2 - 2ad + d^2 \Rightarrow d^2 - 4ad = 0 \Rightarrow a(a-4d) = 0$
 $a = 4d$

نکته: اگر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی دهند، به ترتیب اضلاع را برابر $3d, 4d, 5d$ می گذاریم (همان قدرنسبت است).

نکته: مثلث هایی که دانستن نسبت اضلاع آن ها خیلی به حل سوالات خصوصاً در درس فیزیک و مثلثات ریاضی کمک

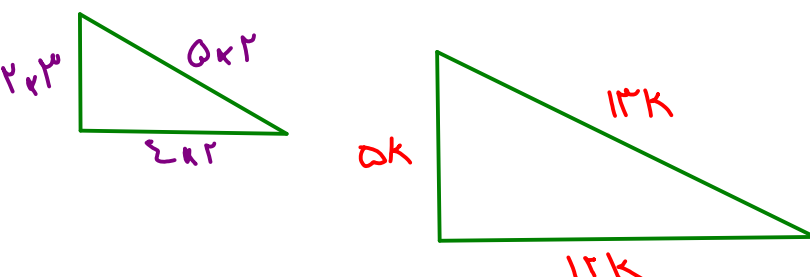
می کند، عبارت اند از: (مثلث های فیثاغورثی)

(۱) $3k, 4k, 5k$

(۲) $5k, 12k, 13k$

(۳) $7k, 24k, 25k$

(۴) $8k, 15k, 17k$



سوال: زوایای یک مثلث بر حسب درجه، تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زوایای این مثلث ۳۵۰۰ باشد، بزرگ‌ترین زاویه این مثلث چند درجه است؟ «تالیفی»

$$80 \text{ (4)} \quad 70 \text{ (3)} \quad 60 \text{ (2)} \quad 50 \text{ (1)}$$

$$(\alpha + d)(\alpha - d) = 3500 \rightarrow \alpha^2 - d^2 = 3500$$

$$3a = 180 \rightarrow a = 60$$

$$3500 - d^2 = 3500 \rightarrow d^2 = 100 \rightarrow d = 10$$

$$40 + 10 = 50$$

نکته: اگر زوایای یک مثلث تشکیل دنباله حسابی دهند، حتماً یکی از زوایا (زاویه وسطی) ۶۰ درجه بوده و دو زاویه دیگر به یک اندازه از ۶۰ درجه بیشتر و کمتر هستند ($60 + d$ و $60 - d$).

سوال: زوایای یک پنج‌ضلعی بر حسب درجه، تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر کوچک‌ترین زاویه ۷۶ درجه باشد، قدرنسبت این دنباله حسابی چند درجه است؟ «تالیفی»

$$20 \text{ (4)} \quad 18 \text{ (3)} \quad 16 \text{ (2)} \quad 12 \text{ (1)}$$

$$(n-2) \times 180 = 540 \rightarrow (5-2) \times 180 = 540$$

$$\alpha - 2d, \alpha - d, \alpha, \alpha + d, \alpha + 2d$$

$$5\alpha = 540 \rightarrow \alpha = 108$$

$$\alpha - 2d = 76 \rightarrow 108 - 76 = 2d \rightarrow d = 16$$

سوال: زاویه‌های یک پنج‌ضلعی منتظم بر حسب درجه، یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n می‌سازند. اگر این جمله عمومی $a_n = (m+3z)n^2 + (4m-k)n + k$ باشد، حاصل $k+mz$ برابر کدام گزینه است؟ «تالیفی»

$$135 \text{ (1)} \quad 108 \text{ (3)} \quad -108 \text{ (4)} \quad -135 \text{ (2)}$$

$$(n-2) \times 180 = 540$$

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{540}{5} = 108$$

$$m+3z = 0 \rightarrow m = -3z$$

$$4m-k = 0 \rightarrow k = 4m$$

$$k = 108$$

$$m = 27$$

$$m = -3z \rightarrow z = -9$$

درج واسطه حسابی

یعنی این که تعدادی عدد بین دو عدد a و b قرار دهیم به طوری که همه اعداد دنباله حسابی تشکیل دهند.

سوال: اگر بین دو عدد a و b n واسطه حسابی درج کنیم، قدرنسبت دنباله حسابی جدید از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

واسطه‌های حسابی $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$t_n = t_1 + (n-1) \times d \rightarrow t_{n+1} = t_1 + n \times d$$

سوال: بین دو عدد ۶ و ۴۸، پنج واسطه حسابی قرار می‌دهیم. جمله هفتم دنباله چند برابر واسطه سوم است؟

تالیفی

$$d = \frac{48-4}{5} = 10 \Rightarrow d=10$$

$$t_7 = t_1 + 6d = 4 + 6 \times 10 = 64$$

$$\frac{64}{20} = \frac{48}{16}$$

سوال: بین دو عدد -18 و a ، هشت واسطه حسابی درج می‌کنیم. به ازای کدام مقدار a واسطه ششم درج شده برابر صفر است؟

نردبام جامع

$$d = \frac{a - (-18)}{8} = \frac{a+18}{8}$$

$$t_6 = t_1 + 7d \Rightarrow -18 + 7d = 0 \Rightarrow d = \frac{18}{7}$$

$$\frac{18}{7} = \frac{a+18}{8} \Rightarrow a = 9$$

سوال: بین دو عدد ۴ و ۲۸، تعداد n عدد قرار می‌دهیم به طوری که همگی تشکیل یک دنباله حسابی با

قدرنسبت ۴ بدهند. مقدار n و مجموع تمامی این واسطه‌ها به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ «میکروقرن»

$$d = \frac{28-4}{n+1} = 4 \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n=5$$

$$t_1 = 4, t_2 = 8, t_3 = 12, t_4 = 16, t_5 = 20, t_6 = 24, t_7 = 28$$

مجموع = ۸۰

سوال: بین دو عدد ۳ و ۲۷ تعدادی واسطه حسابی درج می کنیم تا بزرگ ترین واسطه، ۱۶ واحد از کوچک ترین واسطه بیشتر باشد. قدرنسبت دنباله حاصل کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۳، ۳+d، ۳+۲d، ...، ۳+nd، ۲۷

$d = \frac{27-3}{n+1} = \frac{24}{n+1} = 6 \rightarrow n=5$

* $(27-d) - (3+d) = 14 \rightarrow 24 - 2d = 14 \rightarrow d = 5$

جملات مشترک دو دنباله حسابی

اگر دو دنباله حسابی متفاوت a_n و b_n دارای جملات مشترک باشند، خود جملات مشترک آن ها نیز یک دنباله حسابی جدید ایجاد می کنند که اولین جمله آن، اولین جمله مشترک دو دنباله a_n و b_n بوده و قدرنسبت آن **م.م.ک** حاصل ضرب قدرنسبت دو دنباله a_n و b_n است.

اولین جمله مشترک دو دنباله a_n و b_n

دنباله حاصل از جملات مشترک دو دنباله a_n و b_n

کوچکترین مضرب مشترک

م.م.ک قدرنسبت دو دنباله a_n و b_n است

$t_n = t_1 + (n-1)d$

سوال: دو دنباله حسابی $a_n: 5, 11, 17, 23, \dots$ و $b_n: 3, 10, 17, 24, \dots$ مفروض اند، هشتمین جمله مشترک آن ها چندمین جمله b_n است؟

۴۴ (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۴۷ (۴)

$a_n = 5, 11, 17, 23, 29, \dots$ $d_a = 6$

$b_n = 3, 10, 17, 24, 31, \dots$ $d_b = 7$

$d_t = 42$

$t_n = 17 + (n-1) \times 42 \xrightarrow{n=1} t_1 = 17 + 7 \times 42 = 3 + (n-1) \times 7$

$\Rightarrow 17 + 7 \times 42 = (n-1) \times 7 \rightarrow 2 + 42 = n-1 \Rightarrow n = 45$

سوال: دو دنباله $a_n: 4, 8, 12, \dots$ و $b_n: 6, 12, 18, \dots$ مفروض اند. چندمین جمله مشترک این دو دنباله

۹۶ است؟

۷ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

$a_n = 4, 8, 12, 16, 20, \dots$ $d_a = 4$

$b_n = 6, 12, 18, 24, 30, \dots$ $d_b = 6$

$d_t = 12$

$t_n = 12 + (n-1) \times 12 = 96 \rightarrow 12(n-1) = 84 \rightarrow n = 8$

تعداد اعداد موجود در یک دنباله حسابی

می‌توان با جایگذاری جملات اول و آخر و قدرنسبت در جمله عمومی، n را به دست آورد یا اینکه از فرمول زیر استفاده کرد:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$\text{تعداد اعداد حسابی} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{قدرنسبت}} + 1$$

«تالیفی»

سوال: در دنباله حسابی ۹۶ و ... و ۳۰ و ۲۴ و ۱۸، چند عدد وجود دارد؟

$$t_n = t_1 + (n-1)d \quad 13 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$15 \quad (2)$$

$$39 \times 2 = 13 \times 3 \times 2$$

روش اول: دنباله حسابی

$$96 = 18 + (n-1) \times 4 \rightarrow (n-1) \times 4 = 78 \Rightarrow n-1 = 13 \rightarrow n = 14$$

روش دوم: فرمول

$$n = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{قدرنسبت}} + 1 = \frac{96 - 18}{4} + 1 = 14$$

مضارب یک عدد

مضارب متوالی عددی مثل k یک دنباله حسابی با قدرنسبت k ایجاد می‌کنند.

$$d = k$$

«تالیفی»

سوال: تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۶ چند است؟

$$151 \quad (4)$$

$$150 \quad (3)$$

$$149 \quad (2)$$

$$148 \quad (1)$$

مضارب ۶ زوج اند ← عدد بیان زوج دارند!

روش اول: تشریحی

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$194 = (n-1) \times 6 \rightarrow n-1 = 149 \rightarrow n = 150$$

روش دوم: تستی

$$100 \leq 4n \leq 999 \rightarrow \frac{100}{4} \leq n \leq \frac{999}{4} \rightarrow 25 \leq n \leq 249.75 \rightarrow 25, \dots, 249$$

$$n = 17, 18, 19, \dots, 144 \rightarrow 144 - 17 + 1 = 128$$



«تالیفی»

سوال: تعداد اعداد بخش پذیر بر ۷ که بین ۹۰ و ۲۸۰ قرار دارند کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۵ (۳)

۲۶ (۲)

۲۷ (۱)

$$90 < 7n < 280 \xrightarrow{\div 7} \frac{90}{7} < n < \frac{280}{7} \rightarrow 12.8 < n < 40$$

$$n = 13, 14, \dots, 39 \xrightarrow{\text{تعداد}} 39 - 13 + 1 = 27$$

آزمون تستی دنباله حسابی

سوال: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، روابط $a_{52} - a_{51} = a_{52}$ و $a_{10} = -3$ برقرار است. این دنباله چند جمله منفی دارد؟

۲۰ (۱)

۲۱ (۲)

«نردبام جامع»

۲۳ (۴)

$$a_{52} - a_{51} = a_{52} \rightarrow a_{51} = -\frac{1}{2} - \frac{a_{52}}{2} = -\frac{21}{2}$$

$$a_{10} = -3 \rightarrow a_1 + 9d = -3$$

$$a_{52} - a_{51} = a_{52} \xrightarrow{\text{مردود}} \frac{(a_{52} - a_{51})}{a_{52}} = \frac{a_{52}}{a_{52}} \rightarrow \frac{2d}{2a_{52}} = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$a_n < 0 \rightarrow -\frac{21}{2} + \frac{1}{2}(n-1) < 0 \xrightarrow{\times 2} -21 + (n-1) < 0 \rightarrow n < 22$$

آزمون بهترین تست‌های میکرو قرن جدید از دنباله‌ی حسابی (عدی)

سوال: در یک دنباله حسابی $a_5 - a_3 = 10$ و $a_5 + a_6 = 51$ است. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

۴۰ (۴)

۴۳ (۳)

۵۰ (۲)

۵۳ (۱)

$$(a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 51 \rightarrow 2a_1 + 9d = 51 \rightarrow 2a_1 = 9 \rightarrow a_1 = \frac{9}{2}$$

$$a_8 = a_1 + 7d = \frac{9}{2} + 7 \times \frac{9}{2} = 36$$

سوال: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، اگر $a_1 + a_7 + a_{10} = 51$ باشد، جمله ششم دنباله کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

$$a_1 + a_7 + a_{10} = 51 \xrightarrow{\frac{1+7+10=18}{3 \times 6 = 18}} 3a_6 = 51 \rightarrow a_6 = 17$$



۱۹۲ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۲۴ و مجموع سه جمله بعدی ۵۱ است. جمله نهم کدام است؟

$$\begin{aligned} & a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24 \quad (1) \\ & (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 51 \quad (2) \\ & \text{از (۱) و (۲) با هم کم می‌کنیم:} \\ & 3d + 3d + 3d = 27 \rightarrow d = 9 \\ & \text{در (۱) با d=9 جایگزین می‌کنیم:} \\ & a_1 + (a_1 + 9) + (a_1 + 18) = 24 \\ & 3a_1 + 27 = 24 \rightarrow 3a_1 = -3 \rightarrow a_1 = -1 \\ & \text{پس جمله نهم: } a_9 = a_1 + 8d = -1 + 8 \times 9 = 71 \end{aligned}$$

۱۹۵ در یک دنباله حسابی $a_2 = 4 - \sqrt{2}$ و $a_7 = 6 - \sqrt{2}$ است، مجموع پنج جمله هفتم چقدر از مجموع پنج جمله دوم بیشتر است؟

$$\begin{aligned} & a_2 = 4 - \sqrt{2} \quad (1) \\ & a_7 = 6 - \sqrt{2} \quad (2) \\ & d = a_7 - a_2 = 2 \rightarrow d = 2 \\ & \text{مجموع پنج جمله دوم: } S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \\ & \text{مجموع پنج جمله هفتم: } S_5' = \frac{5}{2}(2a_7 + 4d) \\ & \text{تفاوت: } S_5' - S_5 = \frac{5}{2}(2a_7 - 2a_1 + 4d - 4d) = \frac{5}{2}(2(a_7 - a_1) + 4d) \\ & = \frac{5}{2}(2(6 - 4 - \sqrt{2} - (4 - \sqrt{2})) + 4 \times 2) = \frac{5}{2}(2(2 - \sqrt{2} - 4 + \sqrt{2}) + 8) \\ & = \frac{5}{2}(2(-2) + 8) = \frac{5}{2}(4) = 10 \end{aligned}$$

۱۹۷ در یک دنباله حسابی حاصل ضرب جملات هشتم و هفدهم برابر با ۲۴ و حاصل ضرب جملات یازدهم و چهاردهم برابر ۹۶ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (دنباله حسابی را صعودی در نظر بگیرید.)

$$\begin{aligned} & t_8 \times t_{17} = 24 \quad (1) \\ & t_{11} \times t_{12} = 96 \quad (2) \\ & \text{در (۱) با } t_{17} = t_8 + 9d \text{ جایگزین می‌کنیم:} \\ & t_8 \times (t_8 + 9d) = 24 \\ & \text{در (۲) با } t_{11} = t_8 + 3d \text{ و } t_{12} = t_8 + 4d \text{ جایگزین می‌کنیم:} \\ & (t_8 + 3d) \times (t_8 + 4d) = 96 \\ & \text{از (۱) و (۲) با هم کم می‌کنیم:} \\ & (t_8 + 3d)(t_8 + 4d) - t_8(t_8 + 9d) = 96 - 24 \\ & t_8^2 + 7dt_8 + 12d^2 - t_8^2 - 9dt_8 = 72 \\ & -2dt_8 + 12d^2 = 72 \rightarrow -2t_8 + 12d = 72 \rightarrow t_8 = 6d - 36 \\ & \text{در (۱) با } t_8 = 6d - 36 \text{ جایگزین می‌کنیم:} \\ & (6d - 36)(6d - 36 + 9d) = 24 \\ & (6d - 36)(15d - 36) = 24 \\ & 90d^2 - 396d + 1296 = 24 \\ & 90d^2 - 396d + 1272 = 0 \\ & 15d^2 - 66d + 212 = 0 \\ & \Delta = 66^2 - 4 \times 15 \times 212 = 4356 - 12720 = -8364 \\ & \text{پس } d = 2 \end{aligned}$$

۱۹۹ در بیست جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. قدرنسبت کدام است؟

$$\begin{aligned} & a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135 \quad (1) \\ & a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150 \quad (2) \\ & \text{از (۱) و (۲) با هم کم می‌کنیم:} \\ & (a_1 + a_3 + \dots + a_{19}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{20}) = 135 - 150 \\ & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{19} - a_{20} = -15 \\ & -d + (-d) + \dots + (-d) = -15 \\ & -10d = -15 \rightarrow d = 1.5 \end{aligned}$$

۲۰۸ در یک دنباله حسابی $a_1 = 50$ و $a_7 = 10$ می‌باشد، این دنباله چند جمله کوچکتر از ۱۰۰ دارد که بر ۳ بخش پذیر است؟

$$\begin{aligned} & a_1 = 50 \quad (1) \\ & a_7 = 10 \quad (2) \\ & d = a_7 - a_1 = 10 - 50 = -40 \\ & a_n = a_1 + (n-1)d \\ & 10 = 50 + (n-1)(-40) \\ & 10 = 50 - 40n + 40 \\ & 10 = 50 - 40n + 40 \rightarrow 10 = 90 - 40n \rightarrow 40n = 80 \rightarrow n = 2 \\ & \text{پس جمله دوم } a_2 = 10 \text{ است.} \\ & \text{مجموع جملات بخش پذیر بر ۳: } 50, 10, -30, -70, -110, \dots \\ & \text{پس ۵ جمله وجود دارد.} \end{aligned}$$

۲۰۹ چند عدد سه رقمی داریم که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۱۱ برابر ۳ است؟

$\lambda^4(1) \xrightarrow{II} \lambda^3(1) \xrightarrow{II} \lambda^2(1)$

$\lambda^4(1), \lambda^3(1), \lambda^2(1), \dots, 99$

$$n = \frac{\widehat{\text{عدد اول}} - \widehat{\text{عدد اول}}}{\widehat{\text{مقدار}} + 1} = \frac{993 - 102}{11} + 1 = 11 + 1 = 12$$

۲۱۷ اگر t_n یک دنباله حسابی با جملات مثبت باشد، حاصل $\frac{t_{10} + t_{12}}{t_8 + t_{14}}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{2}{R}} = \frac{R}{2}$$

۲۲۰) در یک دنباله حسابی $t_2 + t_1 + t_6 = 15$ است. اگر $t_7 + t_m = 10$ باشد، کدام است m ؟

$\Delta (K) \quad 9 (W)$
 $t_r + t_m = 10 = r \times 2 = r \times t_y$
 $r + m = 1r \rightarrow m = 9$

۲۳۹ بین دو عدد ۲ و ۴۷ چند واسطه حسابی قرار دهیم تا بزرگترین واسطه، ۶ برابر کوچکترین واسطه باشد؟

$d = \frac{rV - r}{n+1} = \frac{\sum 0}{n+1} = 0$

$\Rightarrow n+1=9 \rightarrow n=8$

$\frac{rV-d}{r+d}=4 \Rightarrow rV-d=12+4d$

$\Rightarrow rV=vd \rightarrow d=0$

۴۴۲ دو دنباله حسابی $t_n = 1, 6, 11, \dots$ و $a_n = 4n - 2$ ، چند جمله مشترک کمتر از 80 دارند؟

r (K) $\xrightarrow{\sigma}$ ϵ (N) Δ (P) $\mathcal{F}$ (B)

$t_n = 1, 4, 11, 14, 21, 24, \dots$ $d_t = \sigma$ $d_o = \text{r.r.v.}$
 $a_n = 2, 4, 1, \dots$ $d_a = \epsilon$

$$b_n = b_1 + (n-1) \times d = 9 + (n-1) \times 2 = 1 + (n-1) \times 2 \quad \text{VSE}$$

۲۴۵ دو دنباله $a_n = 4n + 1$ و $b_n = 2n + 5$ چند جمله مشترک ۳ رقمی دارند؟

۲۲۶ (۴)

۲۲۵ (۳)

۲۲۱ (۲)

۲۲۰ (۱)

* $a_n = 5, 9, 13, 17, 21, \dots$ $d_a = 4$
 * $b_n = 7, 9, 11, 13, \dots$ $d_b = 2$
 $d_t = 4 \rightarrow 2$
 $t_n = t_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \times 2 = 2n + 3 \rightarrow t_n = 2n + 3$
 $100 \leq t_n \leq 999 \rightarrow 100 \leq 2n + 3 \leq 999 \rightarrow 97 \leq 2n \leq 996 \rightarrow 48.5 \leq n \leq 498 \rightarrow n = 49, 51, \dots, 497$

دنباله هندسی

دنباله ای است که هر جمله از حاصلضرب یک عدد ثابت در جمله قبل حاصل شده است؛ به آن عدد ثابت **قدرنسبت** می‌گوییم و آن را با r یا q نشان می‌دهیم.

جمله n ام $\dots$ جمله چهارم $\dots$ جمله دوم $\dots$ جمله اول

$a_1 \times r^0$ $a_1 \times r$ $a_1 \times r^2$ $a_1 \times r^3$

a_1 $a_1 \times r$ $a_1 \times r^2$ $a_1 \times r^3$

$a_n = a_1 \times r^{n-1}$

قدرنسبت

نکته: برای به دست آوردن قدرنسبت در دنباله هندسی کافیست هر جمله را بر جمله قبل از خود تقسیم کنیم.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

رابطه نهم جمله قبل

نکته: با داشتن دو جمله غیرمتوالی از دنباله هندسی نیز می‌توان قدرنسبت را محاسبه کرد. از رابطه زیر:

$$a_r = a_1 \times r^{r-1}$$

$$a_m = a_1 \times r^{m-1}$$

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

$$a_m = a_n \times r^{m-n}$$

سوال: در مورد دنباله هندسی ... و ۱۶ و ۸ و ۴، پاسخ دهید:

$$a_n = 6, 18, 54, \dots \rightarrow r=3$$

الف) جمله عمومی آن را بنویسید:

$$a_n = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n = 2 \times 3^{n+1}$$

ب) جمله بیستم را بر حسب جملات هشتم و شانزدهم بنویسید:

$$a_{20} = a_8 \times r^{12} \quad a_{20} = a_{16} \times r^4$$

پ) چندمین جمله این دنباله ۵۱۲ است؟

$$a_n = 512 \rightarrow 2^{n+1} = 512 = 2^9 \rightarrow n+1=9 \rightarrow n=8$$

نکته: اگر قدرنسبت یک دنباله هندسی:

۱- منفی باشد ($r < 0$) $\Rightarrow$ این دنباله نه صعودی است و نه نزولی (جملات یکی در میان تغییر علامت می‌دهند) $\Rightarrow$ این حالت را غیر یکنوا می‌گوییم.

۲- برابر ۱ باشد ($r = 1$) $\Rightarrow$ دنباله ثابت است که هم صعودی و هم نزولی است.

۳- بیشتر از ۱ باشد ($r > 1$) $\Rightarrow$ اگر جمله اول مثبت باشد ($t_1 > 0$) دنباله صعودی و اگر جمله اول منفی باشد ($t_1 < 0$) دنباله نزولی است.

۴- بین ۰ و ۱ باشد ($0 < r < 1$) $\Rightarrow$ اگر جمله اول مثبت باشد ($t_1 > 0$) دنباله نزولی و اگر جمله اول منفی باشد ($t_1 < 0$) دنباله صعودی است.

وضعیت یکنوایی	جمله اول (a_1)	قدرنسبت (r)
غیر یکنوا	می‌تواند مثبت یا منفی باشد!	$r < 0$
هم صعودی و هم نزولی (ثابت)	می‌تواند مثبت یا منفی باشد!	$r = 1$
صعودی	$a_1 > 0$	$r > 1$
نزولی	$a_1 < 0$	$r > 1$
نزولی	$a_1 > 0$	$0 < r < 1$
صعودی	$a_1 < 0$	$0 < r < 1$



سوال: اگر در یک دنباله هندسی جملات هشتم و یازدهم به ترتیب ۹ و ۲۴۳ باشند، جمله k ام برابر ۱ است. k کدام است؟

تالیفی

$$a_8 = a_1 \times r^7 \rightarrow 9 = a_1 \times r^7 \rightarrow a_1 = \frac{9}{r^7}$$

$$a_{11} = a_1 \times r^{10} \rightarrow 243 = \frac{9}{r^7} \times r^{10} \rightarrow 243 = 9 \times r^3 \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = 3$$

$$a_n = \frac{1}{3^5} \times 3^{n-1} \rightarrow \frac{1}{3^5} \times 3^{n-1} = 1 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^5 \Rightarrow n-1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

(۱) ۷

$k=6$

سوال: در یک دنباله هندسی جملات هشتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۵۱۲ هستند. اگر این دنباله غیر یکنوا باشد، جمله پانزدهم چند برابر جمله دهم است؟

تالیفی

$$a_8 = a_1 \times r^7 \rightarrow 32 = a_1 \times r^7$$

$$a_{12} = a_1 \times r^{11} \rightarrow 512 = a_1 \times r^{11}$$

$$\frac{a_{12}}{a_8} = \frac{512}{32} = r^4 \rightarrow r^4 = 16 \rightarrow r = \pm 2$$

$$a_{15} = a_1 \times r^{14} = \frac{32}{r^7} \times r^{14} = 32 \times r^7 = 32 \times (\pm 2)^7 = \pm 2048$$

(۱) ۳۲

سوال: در یک دنباله هندسی $a_{n+1} = 2a_n$ و $a_3 = 20$ است. چندمین جمله این دنباله برابر ۳۲۰ است؟

آزمون های گاج

$$a_{n+1} = 2a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \rightarrow r = 2$$

$$a_3 = 20 \rightarrow a_1 \times r^2 = 20 \rightarrow a_1 \times 2^2 = 20 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_n = 5 \times 2^{n-1} = 320 \rightarrow 2^{n-1} = 64 \rightarrow n-1 = 6 \rightarrow n = 7$$

(۱) ششم

(۲) هفتم

(۳) هشتم

(۴) نهم

سوال: حاصل ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صعودی ۱۲۵ و جمله بزرگتر این دنباله ۴۹ برابر جمله کوچکتر است. جمله پنجم این دنباله چند است؟

تالیفی

$$\frac{a}{r}, a, ar \rightarrow a^3 = 125 \rightarrow a = 5$$

$$\frac{ar}{a} = 49 \rightarrow \frac{ar^2}{a} = 49 \rightarrow r^2 = 49 \rightarrow r = \pm 7$$

صعودی

$$r = 7$$

$$a_5 = a_1 \times r^4 = 5 \times 7^4 = 5 \times 2401 = 12005$$

(۱) ۳۴۳

(۲) ۱۳۴۳

(۳) ۷۱۵

(۴) ۱۷۱۵

سوال: چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۲۰ و مجموع دو عدد بزرگتر برابر ۴۵ است. بزرگترین عدد در بین این اعداد کدام است؟

«تک IQ»

$$a, ar, ar^2, ar^3$$

$$a + ar = 20 \rightarrow a(1+r) = 20$$

$$ar^2 + ar^3 = 45 \rightarrow ar^2(1+r) = 45$$

$$\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{45}{20} \rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \rightarrow r = \pm \frac{3}{2}$$

$$r = +\frac{3}{2}$$

$$a(1+r) = 20 \rightarrow \frac{5}{2} \times a = 20 \rightarrow a = 8$$

سوال: یک دنباله هندسی شامل ۲۰ جمله مثبت داریم. اگر مجموع همه جملات ۳ برابر مجموع جملات ردیف زوج باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

«آزمون های گاج»

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = 3(a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{20}) = 3(a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) = 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$$

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) = 2 \times r \times (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) \rightarrow 2r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

رابطه اندیسی

همانند دنباله حسابی در دنباله هندسی هم بین اندیس ها رابطه ای جذاب وجود دارد؛ با این تفاوت که در دنباله حسابی بین جملات جمع و در دنباله هندسی بین جملات ضرب خواهیم داشت. اینطور:

$$m + n = p + q \Rightarrow a_m \times a_n = a_p \times a_q$$

$$5 + 13 = 1 + 17 \Rightarrow a_5 \times a_{13} = a_1 \times a_{17}$$

سوال: در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n ، اگر $a_7 \times a_{15} = 8$ و $a_{13} = 2$ باشد، آن گاه واسطه حسابی a_9 و ۲۴ چه عددی است؟

«تالیفی»

$$7 + 15 = 13 + 9 \rightarrow a_7 \times a_{15} = a_{13} \times a_9 \rightarrow a_9 = 4$$

$$\frac{24 + a_9}{2} = \frac{24 + 4}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

نکته: فرض کنید حاصل ضرب k تا جمله از یک دنباله هندسی را دارید؛ اگر مجموع اندیس‌های موجود $k.m$ شود، در

این صورت به جای کل حاصل ضرب قبلی، می‌توان t_m^k نوشت:

$t_2 \times t_6 \xrightarrow[2 \times 6 = 12]{2+6=8} t_8$ (تعداد جمله ۲)
 $t_3 \times t_4 \times t_8 \xrightarrow[3 \times 8 = 24]{3+4+8=15} t_{15}$ (تعداد جمله ۳)

سوال: در یک دنباله هندسی $t_1 \times t_9 \times t_5 \times t_3 \times t_7 \times t_6 \times t_2 = 32$ مقدار t_5 کدام است؟

«مهرماه جامع» $1(1) \quad 2(2) \quad 4(4) \quad 8(4)$

$t_1 \times t_2 \times t_3 \times t_4 \times t_5 \times t_6 \times t_7 \times t_8 \times t_9 = 32$
 $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9 \times 5 = 45} = 25 \rightarrow t_5^2 = 32 \rightarrow t_5 = 2$

$t_1 \times t_9 \xrightarrow[2 \times 9 = 18]{1+9=10} t_{10} = 2^2 = 4$
 (تعداد جمله ۲)

شرط تشکیل دنباله هندسی

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، در این صورت حاصل ضرب جملات کناری برابر با مربع جمله وسطی است.

a, b, c

$$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = ac$$

در این صورت b را واسطه هندسی دو جمله a و c می‌نامیم.

سوال: اگر اعداد $\dots, x-4, x$ و $x-6$ جملات متوالی یک دنباله هندسی نزولی باشند، قدرنسبت کدام می‌تواند باشد؟

$b^2 = ac \rightarrow x^2 = -(x+4)(x-6) \Rightarrow x^2 = -x^2 - 2x + 24$
 $\Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \div 2 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0$

$x = -4 \quad \vee \quad x = +3$

$\begin{cases} \text{I} \rightarrow x = -4 : -2, -4, -6, \dots \rightarrow \checkmark \rightarrow r = \frac{-4}{-2} = 2 \\ \text{II} \rightarrow x = +3 : -9, 3, 9, \dots \rightarrow \text{غیریکوا} \end{cases}$

سوال: اگر $2x^2+1$ ، $2x^2+x$ ، $2x^2-x$ به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، واسطه حسابی دو عدد x و $2x$ کدام است؟ a و b

آزمون های تاج

$$*b^2 = ac \rightarrow (2x^2+x)^2 = (2x^2-x)(2x^2+1) \Rightarrow 2x^2+x = 2x^2-x+1$$

$$\Rightarrow 2x^2+x = 2x^2-x+1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+2x}{2} = \frac{2x}{2} = \frac{2x(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}$$

نکته: اگر سه جمله در فاصله برابر نسبت به هم باشند، باز هم شرط تشکیل دنباله هندسی را می توان تعمیم داد و استفاده کرد.

استفاده کرد.

$$a_2, a_9, a_{13} \rightarrow a_9^2 = a_2 \times a_{13}$$

درج واسطه هندسی

یعنی اینکه تعدادی عدد بین دو عدد a و b قرار دهیم به طوری که همه اعداد دنباله هندسی تشکیل دهند.

همراه a و b

سوال: اگر بین دو عدد a و b و n تا واسطه هندسی قرار دهیم، قدرنسبت دنباله جدید از چه رابطه ای محاسبه می شود؟

می شود؟ $(n+2)$

$$a, \text{واسطه}, \dots, b \rightarrow t_{n+2} = t_1 \times r^n$$

$$\Rightarrow t_{n+2} = t_1 \times r^{n+1} \rightarrow b = a \times r^{n+1} \rightarrow r = \frac{b}{a}^{\frac{1}{n+1}}$$

سوال: بین دو عدد ۲ و ۴۸۶، چهار عدد واسطه هندسی قرار می دهیم. واسطه سوم کدام است؟ «تالیفی»

تالیفی

$$2, \text{واسطه}, \dots, 486 \rightarrow t_5 = t_1 \times r^4 \rightarrow 486 = 2 \times r^4 \Rightarrow r = 3$$

$$\rightarrow t_3 = t_1 \times r^2 = 2 \times 3^2 = 18$$



سوال: بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چند واسطه هندسی درج کنیم تا قدرنسبت دنباله هندسی حاصل برابر ۳ باشد؟

«میکروکاج»

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{972}{4} = 3^{n+1} \Rightarrow 3^{n+1} = 243 = 3^5$$

$$n+1 = 5 \Rightarrow n = 4$$

سوال: اگر بین ۲۷ و a^3 دو واسطه هندسی درج کنیم به طوری که مجموع این دو واسطه ۱۲ باشد، a کدام می تواند باشد؟

«کاج»

$$t_2 = t_1 \times r^2 \rightarrow \frac{a^3}{27} = r^2 \rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$27, \text{واسطه اول}, \text{واسطه دوم}, a^3$$

$$27 \times \frac{a}{\sqrt{3}} = 9a$$

$$27 \times \frac{a}{\sqrt{3}} \times \frac{a}{\sqrt{3}} = 9a^2$$

$$9a^2 + 9a = 12 \Rightarrow a^2 + a - \frac{4}{3} = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 1$$

نکته: توجه کنید که به هنگام افزایش واسطه های هندسی، اگر تعداد واسطه ها فرد باشد، توان r یعنی $(n+1)$ عددی زوج می شود که در این صورت دو قدرنسبت قرینه خواهیم داشت.

سوال: بین دو عدد ۲ و ۱۲۸، سه واسطه هندسی قرار داده ایم. یکی از این سه عدد کدام می تواند باشد؟

«تالیفی»

$$2, \text{واسطه اول}, \text{واسطه دوم}, \text{واسطه سوم}, 128$$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^4 = \frac{128}{2} = 64$$

$$r = \pm 2\sqrt{2}$$

$$* r = +2\sqrt{2} : 2, 4\sqrt{2}, 16, 32\sqrt{2}, 128$$

$$* r = -2\sqrt{2} : 2, -4\sqrt{2}, 16, -32\sqrt{2}, 128$$

موشکافی جمله عمومی دنباله هندسی

دنباله ای هندسی است که جمله عمومی آن به صورت تابعی نمایی از n باشد. مثلاً $a_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{3n-1}$ عدد

نکته: جمله عمومی هر دنباله هندسی را می توان به صورت $t_n = a \times b^{mn+k}$ نوشت که همگی حروف ثابت اند به

جز n که متغیر است.

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = a \times b^{m+k} \\ t_r = a \times b^{rm+k} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{t_r}{t_1} = r \Rightarrow \frac{a \times b^{rm+k}}{a \times b^{m+k}} = b^{rm+k-(m+k)} = b^m$$

نکته: اگر بخواهیم با کمک رابطه فوق جمله اول دنباله (t_1) را محاسبه کنیم، کافی است $n=1$ را در آن قرار دهیم و اگر بخواهیم قدرنسبت را محاسبه کنیم، می توانیم $r = b^m$ بدانیم.

$$\frac{t_r}{t_1} = r$$

سوال: در دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = 2 \left(-\frac{2}{3}\right)^{1-2n}$ و قدرنسبت r ، مقدار $\frac{r}{t_1}$ کدام است؟

«مهرماه جامع»

$$t_n = a \times b^{mn+k}$$

$$t_n = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2n+1}$$

$$\Rightarrow r = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$$

$$\frac{r}{t_1} = \frac{-\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}$$

$$t_1 \xrightarrow{n=1} t_1 = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2(1)+1} = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^1 = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

سوال: جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = \frac{3^{2-n}}{4}$ است. جمله ششم دنباله $b_n = rn + a$ کدام است؟

(r قدرنسبت دنباله a_n است) «میکروکاج»

$$a_n = \frac{1}{4} \times 3^{-n+2} \rightarrow r = b = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_r \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{1}{4} \times 3^{-2+2} = \frac{1}{4}$$

$$b_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

سوال: جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $t_n = a \cdot r^{n-1}$ است. اگر قدرنسبت این دنباله ۸ و حاصل ضرب جملات دوم و سوم برابر ۵۱۲ باشد، دنباله حسابی $kn = an + b$ چند جمله دورقمی دارد؟ «کاج»

۲۸ (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)

$$r = b^m = 1 \rightarrow r^a = 1 \rightarrow a = 3$$

$$x \cdot t_2 = r^{r(2)+3b} = 4+3b$$

$$* t_3 = r^{r(3)+3b} = 9+3b$$

$$\rightarrow t_2 \times t_3 = 512 \rightarrow r^{(4+3b)+(9+3b)} = 512$$

$$\Rightarrow 4b = -4 \rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow 11 \leq 3n \leq 100 \Rightarrow 3 \leq n \leq 33 \dots$$

سوال: یک دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = a \times \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}$ داریم. اگر $t_1 + t_8 = 18$ ، حاصل t_{19} کدام است؟ «تالیفی»

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

$$* n=1 \rightarrow t_1 = a \times \left(\frac{1}{r}\right)^{-1} = 2a \rightarrow t_1 = 2a$$

$$* n=2 \rightarrow t_2 = a \times \left(\frac{1}{r}\right)^0 = a \rightarrow t_2 = a$$

$$* n=3 \rightarrow t_3 = a \times \left(\frac{1}{r}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{r} = 2 \rightarrow t_{19} = 2$$

$$t_1 + t_8 = 18 \rightarrow 2a + a = 18 \rightarrow a = 6$$

ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی

برای حل سوالات این قسمت از شروط تشکیل دنباله‌های حسابی و هندسی استفاده می‌کنیم. مرور آن‌ها:

$$2b = a + c \quad a, b, c, \dots$$

$$b^2 = a \cdot c$$

برای دنباله حسابی

برای دنباله هندسی

سوال: در یک دنباله حسابی، جملات هفتم، دهم و بیست و دوم، می‌توانند سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. (قدرنسبت این دنباله هندسی کدام است؟ «میکرو قرن جدید»)

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

$$a_7, a_{10}, a_{22} \rightarrow b = a \cdot c \rightarrow a_7^2 = a_{10} \cdot a_{22}$$

$$(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 9d) \times (a_1 + 21d)$$

$$a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 27a_1d + 189d^2$$

$$\Rightarrow 15a_1d + 153d^2 = 0 \Rightarrow 9d(5d + a_1) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -5d$$

$$r = \frac{a_{10}}{a_7} = \frac{a_1 + 9d}{a_1 + 6d} = \frac{-5d + 9d}{-5d + 6d} = \frac{4d}{d} = 4$$

نکته: اگر جملات a_m, a_n و a_p ($p > n > m$) از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی را بسازند، قدرنسبت دنباله هندسی از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$r = \frac{p-n}{n-m}$$

مثال: a_7, a_{10}, a_{12} می‌باشد
سه جمله متوالی دنباله هندسی
 $r = \frac{12-10}{10-7} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

سوال: جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

«تجربی ۹۹»

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{9}{4}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

$$r = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

سوال: در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله صفر است؟

«میکروقرن جدید»

سه جمله متوالی هندسی

(۴) دوازدهم

(۳) یازدهم

(۲) دهم

(۱) نهم

$$a_1 + 2d, a_1 + 4d, a_1 + 8d \rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$

$$\Rightarrow 2d^2 + 2a_1d = 0 \Rightarrow 2d(a_1 + d) = 0$$

$\Rightarrow d = 0$ یا $a_1 + d = 0 \Rightarrow a_1 = -d$

پس $a_1 = -d$

سوال: جمله پنجم یک دنباله حسابی غیر ثابت واسطه هندسی جملات دوم و هفتم آن است. جمله اول دنباله حسابی چند برابر قدرنسبت آن است؟

«IQ جامع»

$a_1 = ?d$

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۱۰ (۲)

۱۰ (۱)

$$b = a \times c \rightarrow a_5^2 = a_2 \times a_7 \rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 6d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 7a_1d + 6d^2$$

$$\Rightarrow 10d^2 + a_1d = 0 \rightarrow d(a_1 + 10d) = 0$$

$\Rightarrow d = 0$ یا $a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_1 = -10d$

سوال: جملات a_1 ، a_2 و a_3 از یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ مفروض اند. اگر با قرار دادن سه جمله بین a_1 و a_2 و نیز n جمله بین a_2 و a_3 ، جملات حاصل دنباله حسابی بسازند، n کدام است؟ (آزمون های گاج)

دنباله های:

$$a_1, \underbrace{0, 0, 0}_{\text{سه جمله}}, 2a_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{2a_1, 2a_2, 2a_3}_{\text{سه جمله}}$$

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{2a_1 - a_1}{3+1} = \frac{a_1}{4} \quad d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{2a_3 - 2a_1}{n+1} = \frac{2(a_3 - a_1)}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{4} = \frac{2(a_3 - a_1)}{n+1} \Rightarrow n+1 = 8 \Rightarrow n = 7$$

سوال: در یک دنباله هندسی غیر ثابت با قدرنسبت ۲، جمله دوم، چهارم و پنجم تشکیل دنباله حسابی می دهند. مقدار r^2 کدام می تواند باشد؟

برابر هندسی: a_2, a_4, a_5

$$\frac{a_4 - a_2}{2} = \frac{a_5 - a_4}{1} \Rightarrow \frac{ar^3 - ar}{2} = \frac{ar^4 - ar^3}{1}$$

$$\Rightarrow r^3 - r = 2(r^4 - r^3) \Rightarrow r^3 - r = 2r^4 - 2r^3 \Rightarrow 0 = 2r^4 - 3r^3 + r$$

$$\Rightarrow r(2r^3 - 3r^2 + 1) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ (غیر ثابت است)} \Rightarrow 2r^3 - 3r^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (r-1)^2(2r+1) = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (غیر ثابت است)} \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{4}$$

سوال: در یک دنباله حسابی غیر ثابت با قدرنسبت d ، به سه جمله اول به ترتیب $\left(\frac{rd}{3}\right)$ و $\left(\frac{rd}{3}\right)$ و $\left(\frac{rd}{3}\right)$ واحد اضافه می کنیم تا سه جمله اول یک دنباله هندسی تشکیل شود. قدرنسبت این دنباله هندسی کدام است؟

دنباله های:

$$a-d, a, a+d \xrightarrow{+\frac{rd}{3}} a-d+\frac{rd}{3}, a+\frac{rd}{3}, a+d+\frac{rd}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a+d+\frac{rd}{3} - a+\frac{rd}{3}}{2} = \frac{a+\frac{rd}{3} - a-d+\frac{rd}{3}}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{d+\frac{2rd}{3}}{2} = \frac{\frac{2rd}{3}-d}{1} \Rightarrow \frac{d+\frac{2rd}{3}}{2} = \frac{\frac{2rd}{3}-d}{1}$$

$$\Rightarrow d+\frac{2rd}{3} = 2\left(\frac{2rd}{3}-d\right) \Rightarrow d+\frac{2rd}{3} = \frac{4rd}{3}-2d \Rightarrow \frac{2rd}{3} = \frac{4rd}{3}-3d \Rightarrow \frac{2rd}{3} = \frac{4rd-9d}{3}$$

$$\Rightarrow 2rd = 4rd - 9d \Rightarrow -2rd = -9d \Rightarrow r = \frac{9}{2}$$

نکته: دنباله ثابت تنها دنباله ای است که:

- ۱- هم حسابی و هم هندسی است.
- ۲- هم صعودی و هم نزولی است.

سوال: چهار جمله اول در دو دنباله هندسی و حسابی مشترک هستند. اگر جملات عمومی دنباله های حسابی و هندسی به ترتیب $t_n = an + b$ و $b_n = cn^{n-1}$ باشند. حاصل $a+r+c-b$ کدام است؟ «تالیفی»

دنباله ثابت است. $t_n = b$ عدد ثابت $r=1$ $a=0$

$b_n = c$ $b=c$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سوال: دنباله اعداد $(2a-1)$ ، a^2 و $b+3$ هم حسابی و هم هندسی است. ab کدام است؟ «تالیفی»

$a^2 = 2a-1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \rightarrow a=1$

$b+3 = 1 \rightarrow b = -2$

$ab = 1 \times (-2) = -2$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سوال: دنباله $a^2, 6a-1, b$ هم حسابی و هم هندسی است. دنباله $t_n = (a+b)^n$ از نظر یکنوایی کدام است؟ «کاج»

$a^2 = 6a-1 \rightarrow a^2 - 6a + 1 = 0 \Rightarrow (3a-1)^2 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3}$

$b = 1$

$t_n = (\frac{1}{3} + 1)^n = (\frac{4}{3})^n \rightarrow r = \frac{4}{3} \rightarrow r > 1$ صعودی

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

درصد تغییرات با استفاده از دنباله هندسی

وقایعی که در هر دوره مشخص مثلاً a درصد کاهش یا افزایش یافته باشند، را می توان از طریق دنباله هندسی حل کرد (مثلاً درآمد، ارزش پول، نیمه عمر عناصر و ...).

روش حل: همیشه حالت اولیه کمیت مورد نظر (مثل سرمایه، سهام و ...) را ۱۰۰ درصد یا ۱ فرض می کنیم. اگر بگه در هر بار مشاهده یا هر دوره a درصد افزایش داشته باشد، آنگاه قدرنسبت دنباله هندسی ما $(1 + \frac{a}{100})$ و اگر بگویند در هر دوره a درصد کاهش داشته باشد، آنگاه قدرنسبت $(1 - \frac{a}{100})$ خواهد بود.

سوال: اگر ارزش اولیه سهام موسسه جشان آکادمی، ۲۵۶ میلیون دلار باشد و ارزش سهام این موسسه در هر سال ۲۵ درصد (افزایش) داشته باشد، پاسخ دهید:

ارزش اولیه
مقدار تغییر
نسبت

$$t_n = 256 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$r = 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow r = \frac{5}{4}$$

الف) پس از سه سال ارزش کل سهام چقدر خواهد شد؟

$$t_3 = 256 \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = 4 \times 125 = 500$$

میلیون دلار

ب) میزان افزایش سهام تا سال پنجم تقریباً چقدر خواهد شد؟

$$t_5 = 256 \times \left(\frac{5}{4}\right)^5 = 256 \times \frac{5^5}{4^5} = \frac{5^5}{4} \approx 781$$

میلیون دلار

$$781 - 256 = 525$$

میلیون دلار

پ) پس از چند سال ارزش سهام این موسسه به ۶۲۵ میلیون دلار می‌رسد؟

$$t_n = 625 \rightarrow n = ? \quad 625 = 256 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{625}{256} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \Rightarrow \frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{5^3}{4^3}$$

$n = 3$

سوال: اگر در هر ۵ دقیقه، جرم اولیه یک ماده پرتوزا ۹۰٪ کاهش یابد، پس از ۱۵ دقیقه، چند درصد از این ماده متلاشی شده است؟

خیلی سبزشیمی دهم

۹۹/۹۹۹ (۴)

۹۹/۹۹ (۳)

۹۹/۹۹ (۲)

۹۹ (۱)

$$r = 1 - \frac{90}{100} = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$n = \frac{15}{5} = 3$$

$$t_n = t_1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = t_1 \times \frac{1}{10^3} = t_1 \times \frac{1}{1000}$$

۹۹٫۹ درصد

$$t_n = t_1 - \frac{t_1}{1000} = \frac{999}{1000} t_1 \times 100$$



آزمون تستی دنباله هندسی

سوال: در یک دنباله هندسی $\frac{a_4}{a_2} = 3$ مقدار $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2}$ چه عددی است؟

نردبام جامع

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{1 + r + r^2 + r^3}{1 + r} = \frac{(1+r) + r^2(1+r)}{(1+r)} = 1 + r^2 = 1 + 3 = 4$$

سوال: چهار عدد مثبت یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگتر از یک می دهند به طوری که اختلاف دو جمله کوچکتر ۴ و اختلاف دو جمله بزرگتر ۹ است. اختلاف دو جمله وسطی چه عددی است؟

نردبام جامع

$$\begin{aligned} a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3 \\ a_1r - a_1 = 4 \Rightarrow a_1(r-1) = 4 \\ a_1r^3 - a_1r^2 = 9 \Rightarrow a_1r^2(r-1) = 9 \end{aligned}$$

از $a_1(r-1) = 4$ داریم $a_1 = \frac{4}{r-1}$

در $a_1r^2(r-1) = 9$ جایگزین می کنیم:

$$\frac{4}{r-1} \cdot r^2 \cdot (r-1) = 9 \Rightarrow 4r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

پس $a_1 = \frac{4}{\frac{3}{2}-1} = 8$

آزمون برترین تست های میکرو قرن جدید از دنباله هندسی

۲۴۹) جملات چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ است. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

$$\begin{aligned} a_4 = 12, a_7 = 96 \\ a_7 = a_4 \cdot r^3 \Rightarrow 96 = 12 \cdot r^3 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \\ a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow 12 = a_1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

۲۵۰) جمله چندم از دنباله هندسی $4, 4\sqrt{2}, 8, \dots$ برابر با ۱۲۸ است؟

۱) یازدهم ۲) سیزدهم ۳) پانزدهم ۴) هفدهم

$$a_1 = 4, r = \sqrt{2}$$

$$a_n = 4 \times (\sqrt{2})^{n-1} = 128 \Rightarrow (\sqrt{2})^{n-1} = 32 = 2^5 \Rightarrow \sqrt{2}^{n-1} = 2^5 \Rightarrow 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^5 \Rightarrow \frac{n-1}{2} = 5 \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(n-1) = 5 \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

۲۵۳) بزرگترین جمله دنباله هندسی $\frac{1}{3}, c, d, \frac{1}{4}, b$ کدام است؟ $\leftarrow$ بزرگترین جمله $\leftarrow$ چون دنباله نزولی است

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۱

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{3} \times r^3 \rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{6} = a \times r^2 \Rightarrow \frac{1}{6} = a \times \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۲۵۵) در دنباله ای با جمله عمومی a_n ، اگر $a_1 = 10$ و $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2$ باشد، چندمین جمله از این دنباله برابر $\frac{5}{3}$ است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۲) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۵

$$* \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} = r \rightarrow \text{دنباله هندسی}$$

$$a_1 = 10 \quad a_n = 10 \times \frac{1}{2}^{n-1} = \frac{10}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \rightarrow n-1=4 \rightarrow n=5$$

۲۵۶) در یک دنباله هندسی اگر $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_n - 2a_{n-1} = 0$ باشد، حاصل $a_5 + a_6$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

(۲) ۵۴

(۳) ۴۲

(۲) ۴۸

(۱) ۳۶

$$* a_n - 2a_{n-1} = 0 \rightarrow a_n = 2a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 = r$$

$$* a_5 + a_6 = a_1 r^4 + a_1 r^5 = 14a_1 + 22a_1 = 36a_1 = 36\sqrt{2}$$

۲۵۹) در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات هفتم و چهارم، ده برابر جمله پنجم است. اگر جمله نهم 10^4 باشد، قدرنسبت

$$a_1 \times r^8 = 10^4$$

دنباله کدام است؟

(۲) ۱۰

$$* a_7 \times a_4 = 10a_5 \Rightarrow a_1 r^6 \times a_1 r^3 = 10a_1 r^4 \Rightarrow a_1 \times r^5 = 10$$

$$* a_1 \times r^1 = 10^4 \Rightarrow r = 10$$

$$\Rightarrow \frac{r^1}{r^5} = \frac{10^4}{10} \Rightarrow r^4 = 10^3 \Rightarrow r = 10$$

۲۶۶ در یک دنباله هندسی صعودی با جملات مثبت، جمله هشتم برابر با مربع جمله k ام است. اگر جمله بیست و ششم این دنباله ۱ باشد،

k کدام است؟

$$\begin{aligned}
 & a_{26} = 1 \rightarrow a_1 r^{25} = 1 \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \\
 & a_n = (a_k)^r \Rightarrow a_1 r^n = (a_1 r^{k-1})^r = a_1^r r^{r(k-1)} \\
 & \Rightarrow 1 = a_1 r^{r(k-1)} \Rightarrow a_1 r^{r(k-1)} = 1 \\
 & r(k-1) = 25 \Rightarrow r(k-1) = 25 \Rightarrow r(k-1) = 25 \Rightarrow k = 17
 \end{aligned}$$

۲۶۸ در یک دنباله هندسی $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 25$ و $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 50$ می باشد. مقدار $a_3 + a_4$ کدام است؟

$$\begin{aligned}
 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 25 \quad (1) \\
 & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 50 \quad (2) \\
 & \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 25 \Rightarrow 12a_1 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{12} \\
 & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 50 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 = 50 \\
 & \Rightarrow a_1 r(1 + r + r^2 + r^3) = 50 \Rightarrow \frac{25}{12} r(1 + r + r^2 + r^3) = 50 \\
 & \Rightarrow r(1 + r + r^2 + r^3) = 24 \Rightarrow r = 2
 \end{aligned}$$

۲۶۹ در یک دنباله هندسی نزولی با ۲۰ جمله مثبت، نسبت دو جمله متوالی آن برابر با ۲ است. حاصل جمع جملات فرد چند برابر

حاصل جمع جملات زوج است؟ (جملات دنباله همگی مثبت هستند)

$$\begin{aligned}
 & r = \frac{1}{2} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \\
 & a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = \frac{a_1(1 - r^{19})}{1 - r} = \frac{a_1(1 - (\frac{1}{2})^{19})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a_1(1 - (\frac{1}{2})^{19})}{\frac{1}{2}} = 2a_1(1 - (\frac{1}{2})^{19}) \\
 & a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = \frac{a_2(1 - r^{20})}{1 - r} = \frac{a_1 r(1 - r^{20})}{1 - r} = \frac{a_1(\frac{1}{2})(1 - (\frac{1}{2})^{20})}{1 - \frac{1}{2}} = a_1(1 - (\frac{1}{2})^{20})
 \end{aligned}$$

۲۷۱ در دنباله هندسی با جمله عمومی t_n ، اگر $t_5 + 2t_4 = 12$ و $4t_4 - t_5 = -108$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

$$\begin{aligned}
 & t_5 + 2t_4 = 12 \rightarrow t_1 r^4 + 2t_1 r^3 = 12 \Rightarrow t_1 r^3(r + 2) = 12 \quad (1) \\
 & 4t_4 - t_5 = -108 \rightarrow 4t_1 r^3 - t_1 r^4 = -108 \Rightarrow t_1 r^3(4 - r) = -108 \quad (2) \\
 & \Rightarrow \frac{r + 2}{4 - r} = -9 \Rightarrow r + 2 = -9(4 - r) \Rightarrow r + 2 = -36 + 9r \Rightarrow 8r = 38 \Rightarrow r = \frac{19}{4}
 \end{aligned}$$

۲۸۳ در یک دنباله هندسی $a_4 a_8 = 8$ است. حاصل $a_7 a_5 a_9 a_3$ کدام است؟

۲۵۶ (ک) ۶۴ (پ) ۱۲۸ (ت) ۳۲ (ث)

$a_3 a_5 a_7 a_9 \xrightarrow{3+5+7+9=24} t_4 = (t_1^2)^4 = 4^4 = 256$

$2 \times 4 = 8$

$t_4 = 1$

۳۱۳ دنباله $x+y, 5, y^2-x^2$ هم حسابی و هم هندسی است. xy کدام است؟

-۱۴ (ک) -۶ (پ) ۶ (ت) ۴ (ث)

$x^2 - y^2 = 5 \rightarrow (x-y)(x+y) = 5$

$x+y = 5$

$x-y = 1$

$x=2$

$2y = 4 \rightarrow y=2$

$2 \times 2 = 4$

۲۸۴ در یک دنباله هندسی اگر $a_2 a_{10} = 3$ باشد، حاصل $a_5 a_7 a_9$ کدام است؟

۱۲ (ک) ۹ (پ) ۶ (ت) ۳ (ث)

$a_5 a_7 a_9 = a_7^3 = (a_7^2)^{3/2} = 3^{3/2} = 9$

$a_2 a_{10} = 3 \rightarrow a_7^2 = 3$

هر چه میخواهد دل تنگت بنویس:

دنباله

مفهوم: تعدادی عدد که دنبال هم نوشته شده‌اند.

خطی: مفهوم: تفاضل جمله‌های متوالی این دنباله، عددی ثابت است؛ $5, 9, 13, 17, \dots$ ← **حالی**

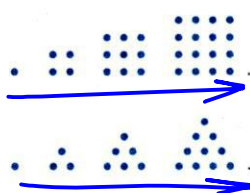
جمله‌ی عمومی: $t_n = an + b$ ← **درجه ۱**

جمله‌ی عمومی: $t_n = an^2 + bn + c$

به‌دست آوردن ضابطه: با داشتن سه جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها، درست مثل تابع، در جمله‌ی عمومی دنباله، شماره‌ها را جای‌گذاری کرده و مساوی مقدار جمله بگذارید. در آخر هم دستگاه حل کنید.

شناسایی: دنباله‌ای درجه‌ی دو است که اختلاف جمله‌های متوالی آن، به‌صورت یک دنباله‌ی حسابی پیش بروند.

ببین: $a = \frac{d}{2}$ $d = 2$ $5, 8, 13, 20, \dots$



مضرب‌های عدد ثابت k : $t_n = kn$

جمله‌ی عمومی: $t_n = n^2$

فرم: $1, 4, 9, 16, \dots$

جمله‌ی عمومی: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$

فرم: $1, 3, 6, 10, \dots$

یک‌درمیان + و - دارد

با منفی شروع می‌شود $(-1)^n$ در فرم کلی جمله‌ها ضرب کن.

با مثبت شروع می‌شود $(-1)^{n+1}$ در فرم کلی جمله‌ها ضرب کن.

فیبوناچی: دو جمله‌ی اول: همیشه ۱ و ۱ هستند.

جمله‌ی عمومی: از جمله‌ی سوم به بعد: $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

جمله‌ها: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ← **بازرسی**

اختلاف هر جمله‌ی دنباله از قبلی خودش، عددی ثابت است به نام قدرنسبت که با d نشان داده می‌شود. $d = t_n - t_{n-1}$

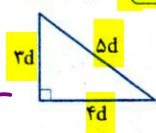
شناسایی: $d > 0$: دنباله صعودی است.

علامت d : $d < 0$: دنباله نزولی است.

آن سه عدد داده شده‌اند واسطه‌ی حسابی ← اگر a و b و c دنباله‌ی حسابی باشند: $b = \frac{a+c}{2}$

وقتی سه عدد، دنباله‌ی حسابی‌اند

ویژگی‌هایی از آن سه عدد داده شده است ← آن‌ها را $a+d, a, a-d$ بگیرد بعد اعمال ویژگی‌ها



در مثلث: سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه، دنباله‌ی حسابی‌اند ← اندازه‌ی ضلع‌ها $3d, 4d, 5d$ و $5d$ است. شکل

فرمول: $t_n = t_1 + (n-1)d$

جمله‌ی عمومی: فرم: بر حسب n ، درجه‌ی اول است.

داده شده است. d : همان ضریب n است. $t_n = 3n - 5$

t_1 : به جای n ، بذار ۱.

دنباله‌ی حسابی

تعداد اعداد موجود در دنباله‌ی حسابی: $n = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{d} + 1$

فرمول: $t_m - t_n = (m-n)d$ را پیدا کن.

فرمول دو جمله و شماره

شناسایی در تست: وقتی تفاضل دو جمله از دنباله‌ی حسابی رو دارید، یاد این فرمول بیفتید!

حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_m+t_n=t_r+t_s$

قانون اندیس‌ها: حالت خاص: مجموع اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست

$m+n=2r \Rightarrow t_m+t_n=2t_r$

$m+n+r=3s \Rightarrow t_m+t_n+t_r=3t_s$

شناسایی در تست: وقتی مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی را دارید، یاد این فرمول بیفتید!

درج واسطه: اگر بخواهی بین a و b دقیقاً m تا واسطه حسابی بذاری، آن وقت: $d = \frac{b-a}{m+1}$ ($a < b$)

شناسایی: حاصل تقسیم هر جمله (به جز t_1) بر جمله ی قبلی خودش، عددی ثابت است به نام قدرنسبت که با r نشان داده می شود.

$$b^2 = ac \quad \text{دنباله ی هندسی } a, b, c$$

به زبان ریاضی: $b^2 = ac$ به فارسی: مجذور وسطی مساوی ضرب دوتای دیگر

ویژگی هایی از آن سه عدد داده شده است $\leftarrow$ آن ها را $ar, a, \frac{a}{r}$ در نظر بگیر و ویژگی ها را برای آن ها اعمال کن.

$$t_n = t_1 r^{n-1} \quad (t_1, r \neq 0)$$

فرمول: $t_n = a(b)^{mn+k}$ فرم: بر حسب n به صورت یک تابع با فرم نمایی است؛

$$r = b^m$$

t_1 : به جای n بذار ۱

دنباله ی هندسی

$$\frac{t_m}{t_n} = r^{m-n}$$

فرمول دو جمله و شماره $\leftarrow$ وقتی دو جمله از دنباله را به همراه شماره ی آن ها داری کاربرد در تست $\leftarrow$ وقتی نسبت دو جمله را دارید، یاد این فرمول بیفتید. پیدا کردن r با داشتن دو جمله از دنباله

$$m+n=r+s \Rightarrow t_m t_n = t_r t_s$$

$$m+n=rk \Rightarrow t_m t_n = t_k^r$$

$$m+n+k=rs \Rightarrow t_m t_n t_k = t_s^r$$

قانون اندیس ها $\leftarrow$ حالت خاص: وقتی مجموع اندیس ها مضربی از تعداد جمله هاست $\leftarrow$ شناسایی در تست: وقتی حاصل ضرب چند جمله از دنباله را دارید، یاد این فرمول بیفتید!

$$(a < b) \quad r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

درج واسطه: اگر بخواهی بین a و b ، دقیقاً m تا واسطه ی هندسی بذاری: $\leftarrow$ توجه: اگر m فرد باشد، باید a و b هم علامت باشند و در این حالت برای r دو جواب قرینه داریم.

هر چه میخواهد دل تنگت بنویس:

برای دستیابی به تدریس های همه دروس اختصاصی به سایت جشان آکادمی (jashan-academy.com) مراجعه کنید و حتما در کانال تلگرام و روبیکا و اینستاگرام ([@tajrobi10jashani](https://www.instagram.com/tajrobi10jashani)) عضو باشید.

ارادتمند شما! امیر رضا جشانی پور